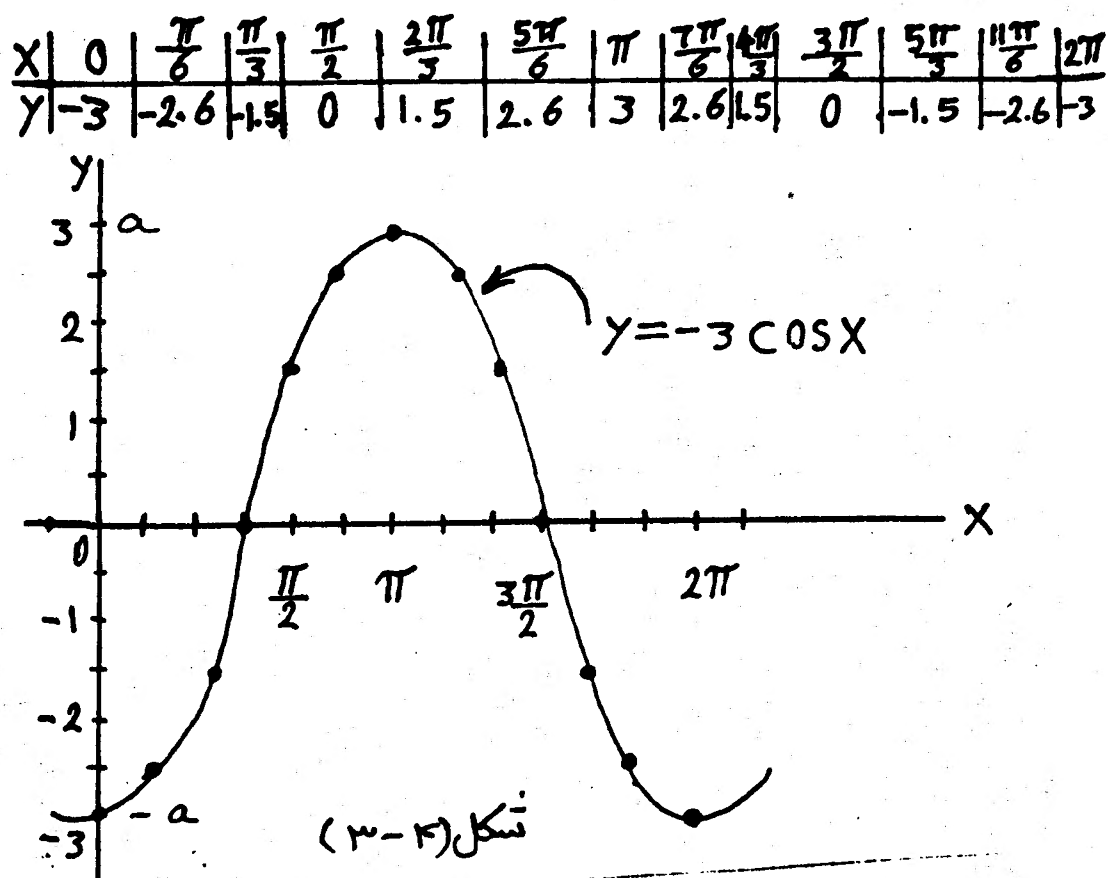
مثال ب : گراف تابع" $y = -3\cos x$ "را رسم کنید.

گراف مذکور از روی جدول مربوط به شکل (۴_۲) رسم گردیده است .



X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	-3	-2.6	-1.5	0	1.5	2.6	3	2.6	1.5	0	-1.5	-2.6	-3

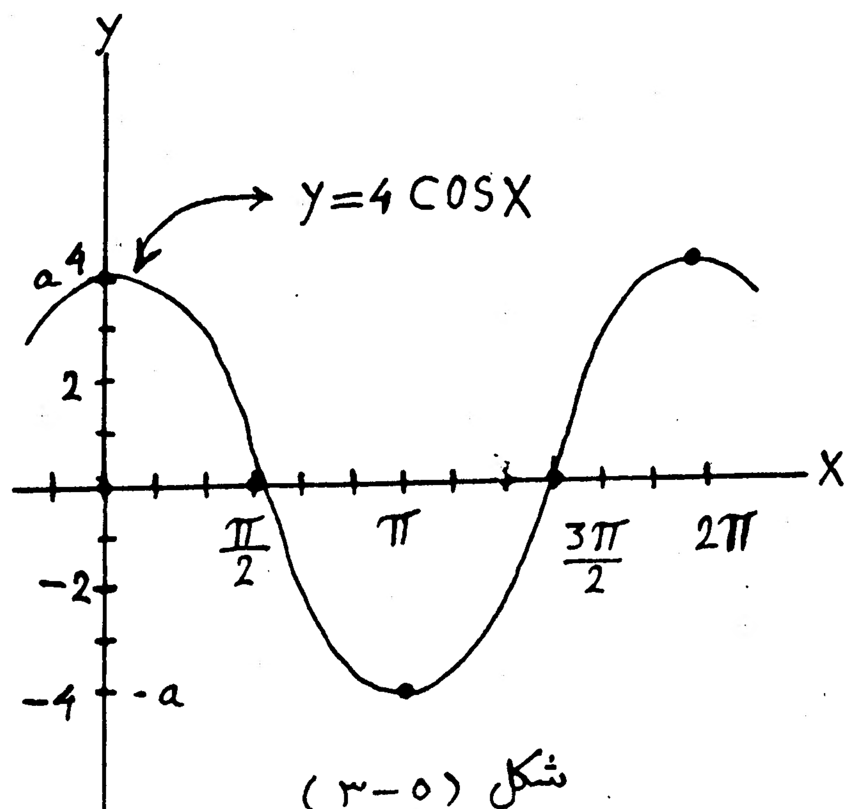
شکل(۴-۳)

در مثال (ب) مشا[redacted]میشود که علامهٔ منفی قبل از کمیت (a) گراف را از سمت مثبت به منفی تغیر میدهد، و تاثیر قیمت(a)و علامهٔ" a" از مثالهای قبلی بخوبی ملاحظه میشود که شکل گراف با کمیت" a" و علامهٔ" a" تغیر میخورد.

مثال ج : گراف تابع" $y = 4\cos x$ "را رسم کنید.

نخست ما برای قیمت های اعظمی و اصغری" y "که عدد (۴) است، جدول ذیل را تهیه میکنیم، بعداً گراف آنرا طوری که در شکل (۵_۲) نشان داده شده ، رسم مینمائیم .

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	4	0	-4	0	4

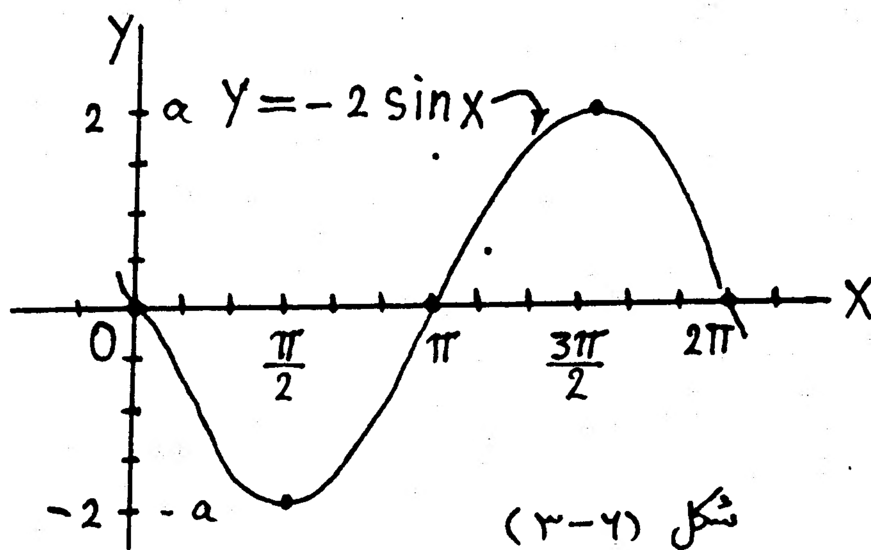


شکل (۳-۵)

مثال د : گراف تابع" $y=-2\sin x$ "را رسم نمائید .

نخست جدول ذیل راتهیه،و بعداً گراف رارسم می نمائیم مانند. شکل (۳-۶):

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-2	0	2	0



شکل (۳-۶)

تمرین های گراف : $y = a\sin x$ ، و $y = a\cos x$:

– (۱) از تمرین (۱ الی ٤)، جدول تحولات "y" و "x" را برای توابع مثلثاتی یی ذیل تکمیل نمائید، و بعداً گراف های مربوط آنرا رسم کنید؟

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π
y																	

1. $y=\sin x$
2. $y=\cos x$
3. $y=3\cos x$
4. $y=4\sin x$

– (۲) از تمرین (۵ الی ۲۰) گراف های توابع ذیل را رسم کنید؟

5. $y = 3\sin x$
6. $y = 5\sin x$
7. $y = \frac{5}{2}\sin x$
8. $y = 0.5\sin x$
9. $y = 2\cos x$
10. $y = 3\cos x$
11. $y = 0.8\cos x$
12. $y = \frac{3}{2}\cos x$
13. $y = -\sin x$
14. $y = -3\sin x$
15. $y = -1.5\sin x$
16. $y = -0.2\sin x$
17. $y = -\cos x$
18. $y = -8\cos x$
19. $y = -2.5\cos x$
20. $y = -0.4\cos x$

– (۳) از تمرین (۲۱ الی ۲٤) گراف های توابع را درصورتی رسم کنید که برای "x" قیمت های (۰، ۱، ۲، ۳، ٤، ۵، ٦، ۷) وضع شود، و واحد زاویه ریدین باشند.

21. $y = \sin x$
22. $y = 3\sin x$
23. $y = \cos x$
24. $y = 2\cos x$

گراف های ($y = a\sin bx$ و $y = a\cos bx$) :

در دروس گذشته مطالعه کردیم، که در ترسیم گراف ($y = \sin x$) قیمت های "y" بعد از هر (2π) دوباره تکرار میشود.

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) \Rightarrow$$

دوام میکند به همین ترتیب ....

هر تابع Fـــ یك پیریود (period)،"P" دارد، درصورتیکه :

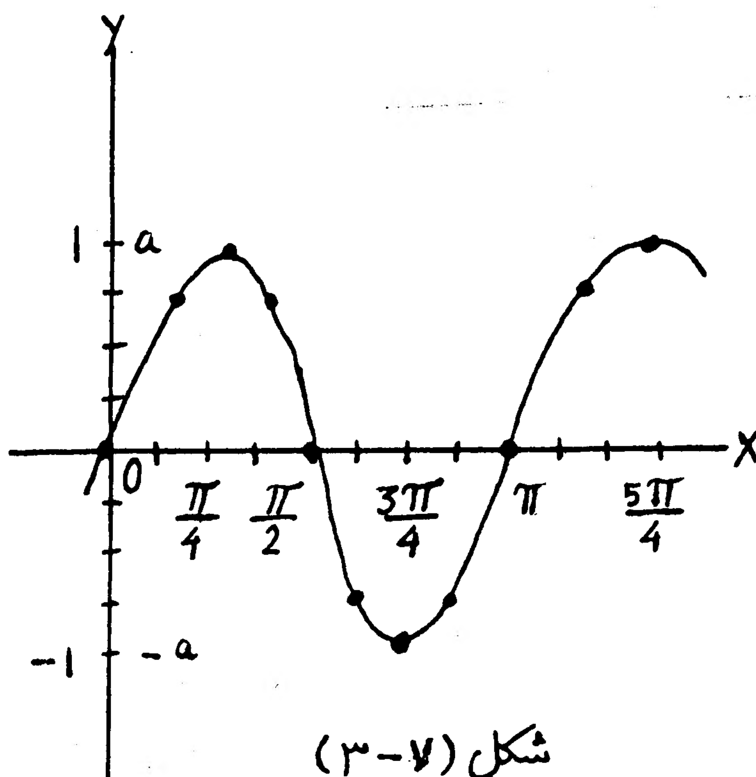
$F(x) = f(x+P)$

برای توابع که نوبتی باشد مانند: ساین ، و کوساین. پیریود ـ (period) عبارت از فاصلهٔ x است بالای محور "x" بین یك نقطهٔ شروع کراف بالای محور "x" و نقطهٔ دیگری بالای محور "x" که کراف دوباره ازآن تکرار میشود. یا فاصله بالای محور x یا دو نقطه که قیمت های y آنها با هم مساوی شوند .

بیائید حال گراف تابع :$(y = \sin 2x)$ را رسم نمائیم .

معادلهٔ فوق به این مفهوم است که: هرقیمت انتخابی‌ای "x" را باید نخست ضرب (۲) نموده، بعداً، قیمت ساین آنرا از جدول دریافت نمائیم . برای تابع فوق جدول ذیل را ایجاد کرده میتوانیم .

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$
2x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
y	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0	0.7	1



شکل (۷-۳)

بابه‌کمك جدول مذکور گراف شکل (۷_۳) بدست می آید.

از جدول و گراف شکل (۷_۲) تابع ($y = \sin 2x$ .....)دیده میشود که گراف شکل (۷_۲) بعد از فاصلهٔ (π) واحد بالای محور(x)دوباره تکرار میشود. موجودیت عدد (۲) قبل از قیمت(x)باعث میشود که،پیریود این تابع نظر به پیریود تابع($\sin x$) نصف گردد . تشریحات فوق را چنین خلاصه کرده میتوانیم .

هرگاه پیریود یك تابع مثلثاتی $F(x)$, P باشد، درآنصورت پیردیو تابع $F(bx)$ مساوی میشود به:(p/b).

چون هر تابع از توابع($\sin x$) ، و($\cos x$)دارای پیریود(2π)میباشد ، لهذا: هرتابع از توابع($\sin bx$)و ($\cos bx$)دارای پیریود ($2\pi/b$) میشود.

مثال الف : پیریود (period) ،($\sin 3x$)مساوی است به ($2\pi/3$) به این معنی که گراف تابع "$y = \sin x$"بعد از هر $2\pi/3$ (تقریباً (۲/۰۹) واحد بالای محور "x"دوباره تکرار میشود.

پیریود($\cos 4x$) مساوی است به :

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

پیریود($\sin \frac{1}{2}x$) مساوی‌است به :

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

دراینجا ملاحظه میشودکه،پیریود این گراف ها نظر به گراف اساسی $\sin x$ طویلتراست .

مثال ب : پیریود($\sin \pi x$)مساوی است به :

$$\frac{2\pi}{\pi} = 2$$

به این معنی که گراف تابع($\sin \pi x$)بعد از هردو واحد بار دیگر تکرار میشود. باید به خاطر داشت که،پیریودهای "$\sin 3x$" و "$\sin x$" تقریبا باهم مساوی اند که توقع نیز همین است

زیرا قیمت (π) از عدد (۳) اندکی بزرگتر است .

پیریود $\cos 3\pi x$ .... مساوی است به : $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$

پیریود $\sin \frac{\pi}{4}x$ .... مساوی است به : $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$

اگر ما تشریحات فوق را بادرنظرداشت موضوع پیریود از گراف شکل (۱ـ۳) ملاحظه نمائیم چنین نتیجه میگیریم .

هریکی از توابع ($y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$)دارای دامنهٔ اعظمی (magnitude) $|a|$ و پیریود ($2\pi/b$)میباشد. دانستن این مشخصات جهت ترسیم توابع مثلثاتی خیلی با ارزش است، که در مثال های ذیل توضیح میشود.

مثال (ج): گراف تابع($y = 3 \sin4x$)را در صورتی سکیچ‌کنید که $0 \leq X \leq \pi$ باشد.

با توجه به نخستین ملاحظه ما درمی یابیم که،دامنهٔ اعظمی یی این تابع عدد (۳)است و پیریود تابع مساوی است به :

$$a = 3 , \qquad \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

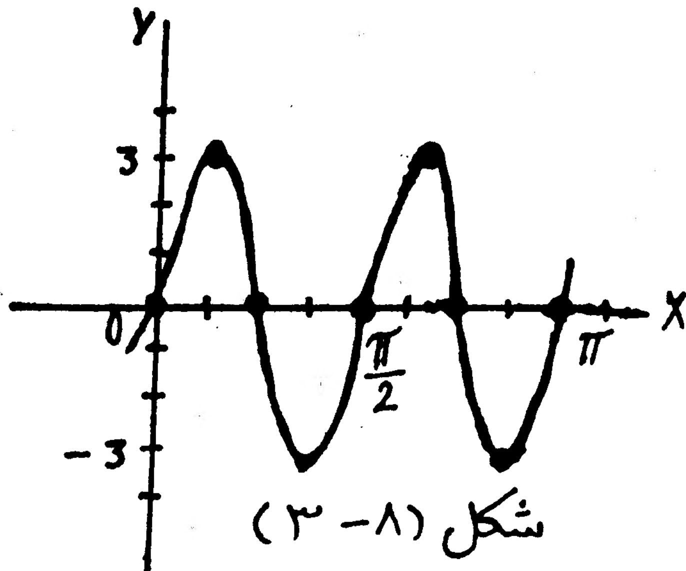
لهذا، ما میدانیم که قیمت "y"مساوی "صفر" است، اگر قیمت "x"، $\pi/2$ باشند. همچنان واضیح میشود که تابع ساین "صفر"است،در صورتیکه :

X	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

$y=0$, اگر $\Rightarrow X=\frac{\pi}{4}$

$y=3$, اگر $\Rightarrow X=\frac{\pi}{8}$

$y=-3$, اگر $\Rightarrow X=\frac{3}{8}\pi$



شکل (۸- ۳)

اکنون جدول ... مربوط به شکل (۸ـ۳) مطالعه نمائید .

در مثال (ج) مشاهده میشود که در سکیچ کردن گراف های ساین و کوساین فاصلهٔ $(\frac{1}{4})$حصه پیریود حایز اهمیت است .

از گراف تابع($y = a \sin bx$)میشود که قیمت "y" در $(\frac{1}{4})$حصهٔ پیریود از مبدأ ، اعظمی میشود ، و بعداز $(\frac{1}{4})$حصهٔ دوم پیریود، قیمت تابع (y) (صفر) میگردد.

به همین ترتیب، در $(\frac{1}{4})$ حصهٔ سوم پیریود ، قیمت(y) در سمت منفی باز اعظمی میشود و در $(\frac{1}{4})$حصهٔ چارم پیریود ، قیمت (y) بالاخره باز (صفر) میشود و این نقطه است که پیریود اول تکمیل میشود . هکذاء پیریودهای دیگر تکرار میشوند.

بخاطر داشته باشید که با دریافت $(\frac{1}{4})$حصهٔ پیریود ، قیمت های اساسی گراف مطلوب معلوم میشوند.

قبل از ترسیم گراف های $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ بسیار مهم است، که نکات ذیل را درنظر داشته باشیم .

(۱) تعیین قیمت اعظمی ـ دامنهٔ گراف $|a|$ (magnitude)

(۲) دریافت پیریود ـ (period) --> $(\frac{2\pi}{b})$

(۳) دریافت قیمت تابع برای هر چارم $(\frac{1}{4})$حصهٔ پیریود.

<u>مثال (د): گراف تابع "$y = -2 \cos 3x$" را رسم کنید.</u>

در صورتیکه $0 \leq x \leq 2\pi$ باشد.

حل : از مثال هذا فهمیده میشود که a (دامنهٔ اعظمی) گراف ۲- و پیریود(T) گراف $(\frac{2\pi}{3})$ است.این به آن مفهوم است که چارم $(\frac{1}{4})$حصهٔ پیریود عبارت است از : $(\frac{1}{4})(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{6}$.

مامیدانیم که در گراف کوساین با قیمت($x=0$) ، تابع(y) اعظمی میشود.

همچنان قیمت y مساوی است به(۲ـ) درصورتیکه قیمت(x)صفر باشد.

(قیمت اعظمی منفی، در گراف شکل (۹ـ۳) ازان جهت است،که قبل از حد متحول علامهٔ منفی موجود میباشد)

گراف صفر میگیرد، درصورتیکه$(x=\frac{\pi}{6})$باشد.

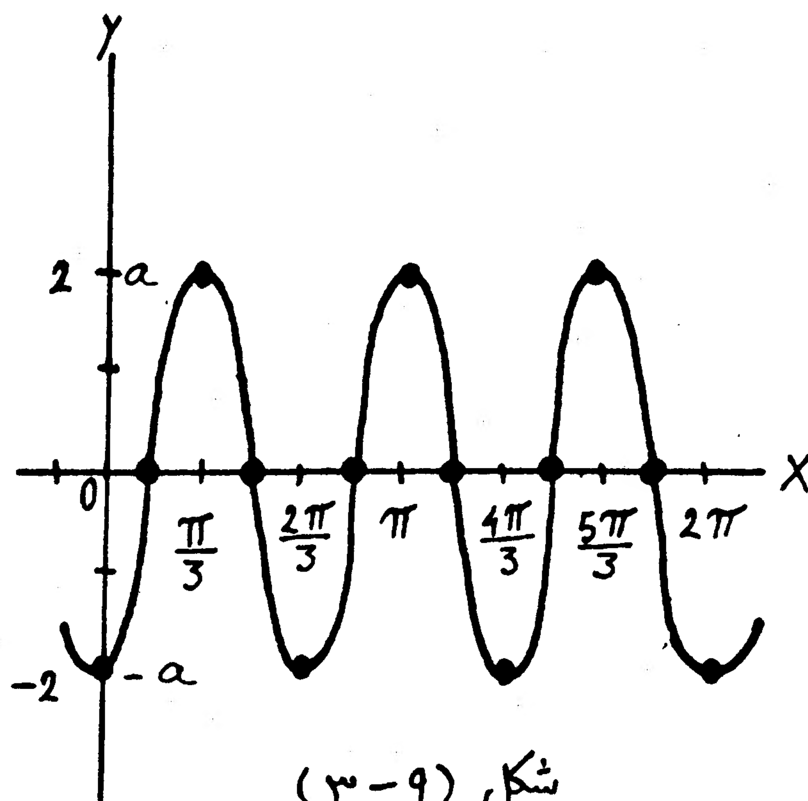
گراف قیمت $\frac{1}{2}$ میگیرد، درصورتیکه$(x=2(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{3})$باشد .

گراف قیمت صفر را میگیرد، در صورتیکه$(x=3(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{2})$ باشد .

گراف قیمت (۲) را میگیرد، درصورتیکه"$x=4(\frac{\pi}{6})=\frac{2}{3}\pi$" باشد.

برای تحلیل بیشتر این موضوع، جدول ذیل را با گراف آن بدقت مطالعه نمائید.

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2



شکل (۹-۳)

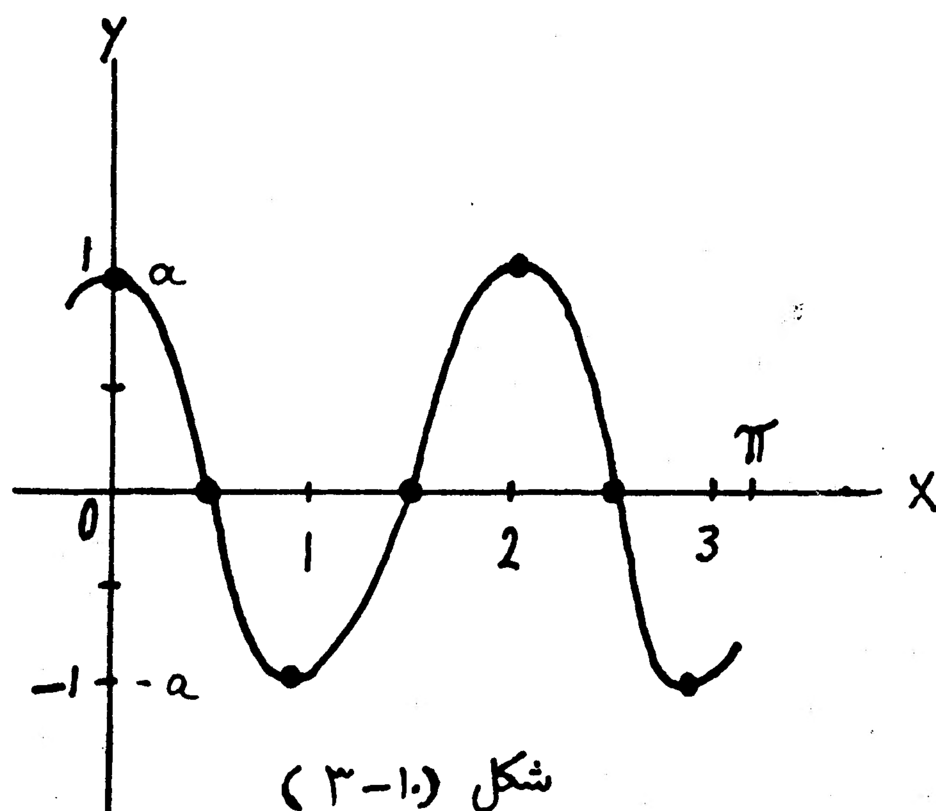
مثال (هـ): گراف"$y=\cos\pi x$"را سکیچ نمائید ؟

در صورتیکه $0 \leq X \leq \pi$ باشد. .

درین تابع قیمت اعظمیa (دامنه) یك است . و پیریود آن $(\frac{2\pi}{\pi}=2)$میباشد.

چون قیمت پیریود آن از جنس (π) نیست ، پس جهت سکیچ کردن گراف آن به(x) قیمت های اعشاری میدهیم،که مطابق آن قیمت های(y)بدست می آید. جدول ذیل و گراف آنرا مطالعه نمائید.

X	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	1	0	-1	0	1	0	-1



شکل (۱۰-۳)

مسایل : از تمرین "۱ الی ۲۰" پیردیوهای هریک تابع را دریافت نمائید.

۱-

1. $y = 2\sin 6x$
2. $y = 4\sin 2x$
3. $y = 3\cos 8x$
4. $y = \cos 10x$
5. $y = -2\sin 12x$
6. $y = -\sin 5x$
7. $y = -\cos 16x$
8. $y = -4\cos 2x$
9. $y = 5\sin 2\pi x$
10. $y = 2\sin 3\pi x$
11. $y = 3\cos 4\pi x$
12. $y = 4\cos 10\pi x$
13. $y = 3\sin \frac{1}{3}x$
14. $y = -2\sin \frac{2}{5}x$
15. $y = -\frac{1}{2}\cos \frac{2}{3}x$
16. $y = \frac{1}{3}\cos \frac{1}{4}x$
17. $y = 0.4\sin \frac{2\pi x}{3}$
18. $y = 1.5\cos \frac{\pi x}{10}$
19. $y = 3.3\cos \pi^2 x$
20. $y = 2.5\sin \frac{2x}{\pi}$

۳ — از تمرین (۱ الی ۲۰) گراف های توابع را سکیچ نمائید:

۴۱— جریان برق در یك سرکت متناوب "60Hz" توسط معادلهٔ ذیل ارائه گردیده است .

$i = 10\sin 120\pi t$

که (i) شدت جریان به امپیر، (t) وقت به ثانیه . گراف (i) در مقابل (t) برای قیمت های ذیل سکیچ نمائید.

$0 \leq t \leq 0/sec.$

۴۲ـ ولتاژیکه یك جنریتور برق، تولید میکند توسط معادلهٔ ذیل ارائه گردیده است :
$V = 200 \cdot \cos 50\pi t$ دراینجا (t) به ثانیه است گراف (V) را در مقابل (t) سکیچ نمائید.

۴۳ـ سرعت پیستون یك انجن توسط معادلهٔ ذیل ارائه گردیده است :

$$(V = 1200 \sin 1200 \pi t)$$

که "V" سرعت است به سانتی متر فی ثانیه و "t" وقت به ثانیه، گراف آن را رسم کنید که حدود تحول "t" چنین باشد :

$$0 \leq t \leq 0/sec$$

گراف $\{y = a\cos(bx+c)$ و $y = a\sin(bx+c)\}$ را رسم کنید.

موضوع بسیار مهم دیگر که باید در مورد توابع ($\sin$ و $\cos$) مورد بحث قرار بگیرد، عبارت است از زاویهٔ فاز (phase angle) .

در تابع "$y = a\sin(bx+c)$" دیده میشود، که (C) عبارت از "زاویهٔ فاز" (phase angle) است که مفهوم زاویهٔ فاز در ذیل توضیح میشود .

مثال (الف) : گراف $y = \sin(2x+\frac{\pi}{4})$ را رسم کنید.

در اینجا ملاحظه میشود که $C = \frac{\pi}{4}$ است، این به آن مفهوم است، که قیمت (x) را تخمینی تعین می نمائیم، بعداً به عدد (۲) ضرب کرده و $(\frac{\pi}{4})$ را با آن جمع میکنیم . سپس قیمت ساین آنرا دریافت می نمائیم، در نتیجهٔ این پروسه ، جدول ذیل بدست می آید. شکل (۱۱ـ۲)

X	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
y	0	0.7	1	0.7	0	−0.7	−1	−0.7	0	0.7

33. (4, 2)   34. (-3, 8)

35. (-3, -5)   36. (6, -1)   37. (-7, 5)

38. (-4, -2)   39. (2, -5)   40. (1, 6)

در تمرینات 14 الی 44 زاویه هارا با استفاده کلکولیتر حل کنند.

زوایای $42.\ 7°16'23''$ $41.\ 21°42'36''$ را به سیستم اعشاری تبدیل کنید؟

زاویه های : $44.\ 57.019°$ $43.\ 86.274°$ را به ثانیه تبدیل کنید؟

تعریف توابع مثلیاتی :

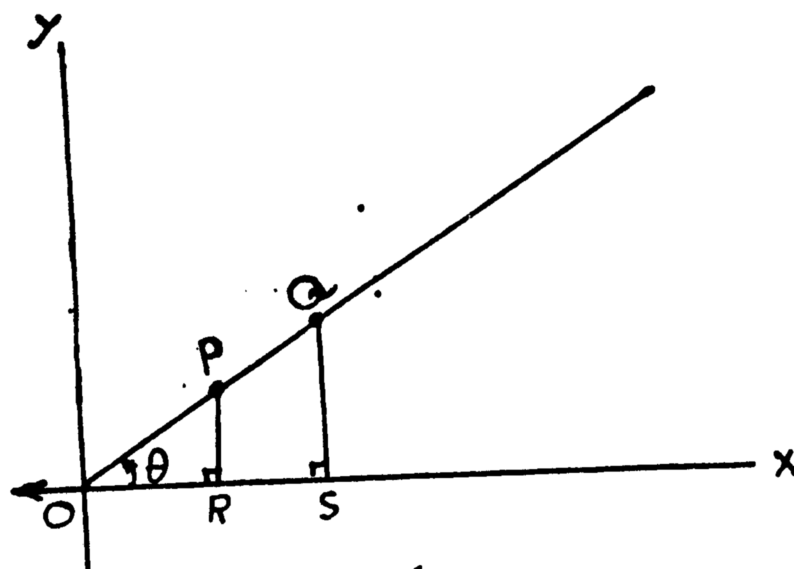
بیائید زاویه θ را درحالت ستندارد قراربدهیم،وبعداً از ضلع دوم آن چندین عمود را بالای محور x رسم کنیم . شکل-(۶ـ۱)، با اجراء این کار مثلث های مشابه بدست می آید که رؤس شان در نقطهء O و یك ضلع آنها بالای محور x منطبق میباشد.

با استفاده از مشابهت این مثلث ها تناسب اضلاع بدست میآید.

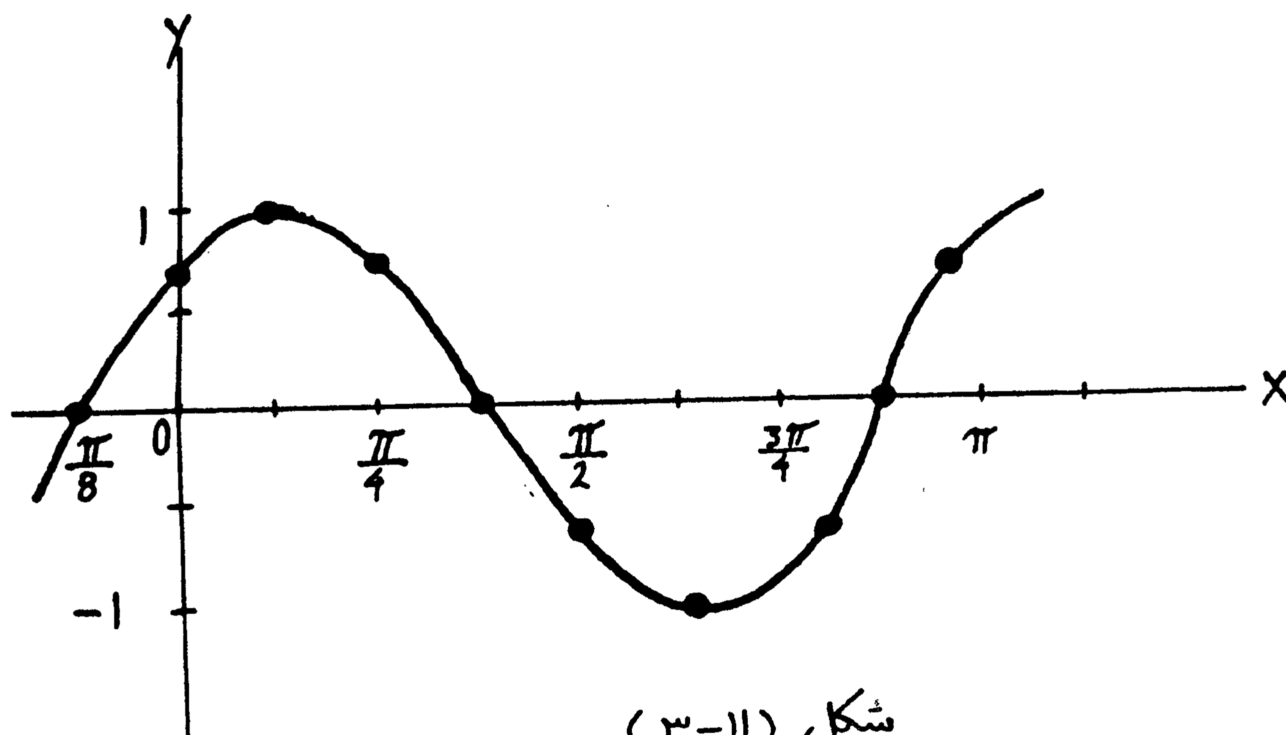
مثال اول:

در شکل (۶ـ۱) مشاهده میکنیم که مثلث های $\overset{\Delta}{ORP}$ و $\overset{\Delta}{OSQ}$ باهم مشابه اند. از مشابهت مثلث های فوق نوشته کرده میتوانیم :

$$\frac{RP}{OR}=\frac{SQ}{OS}$$



شکل (۲-۱)



شکل (۱۱-۳)

از جدول و گراف مثال الف ، مشاهده میشود که گراف تابع :

$$y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

عینا مانند گراف($y = \sin 2x$)است ، صرف به این تفاوت که،گراف به اندازهٔ $\frac{\pi}{8}$ بطرف چپ جلو افتاده است . تأثیر(C)در معادلهٔ{$y = a \sin(bx + c)$}این است،که گراف $y = a \sin bx$ بطرف چپ تناوب می نماید در صورتیکه $C > O$ باشد .

و گراف بطرف راست تناوب میکند اگر $C < O$ قیمت بگیرد.

همچنان مقدار تناوب بطرف چپ یا راست مربوط است به رابطهٔ (-c/b) اینکه گراف چند واحد طرف چپ یا طرف راست تناوب ــ می پذیرد مربوط است به مقدار (-c/b) ، و قیمت همین نسبت را بنام تغیر مکان{displacement ـ (phase shift)}یا به شکل خیلی علمی بنام تناوب فاز (phase shift) یاد میکنند.

اگرما معلومات خود را جهت سکیچ کردن گراف های توابع{$y = a \sin(bx+c)$} و {$y = a \cos(bx$}خلاصه نمایم،آنهم در صورتیکه $b > o$ باشد،به نتیجه گیری ذیل می رسیم .

۱ــ مقدار دامنه (amplitule) مساوی است به |a|

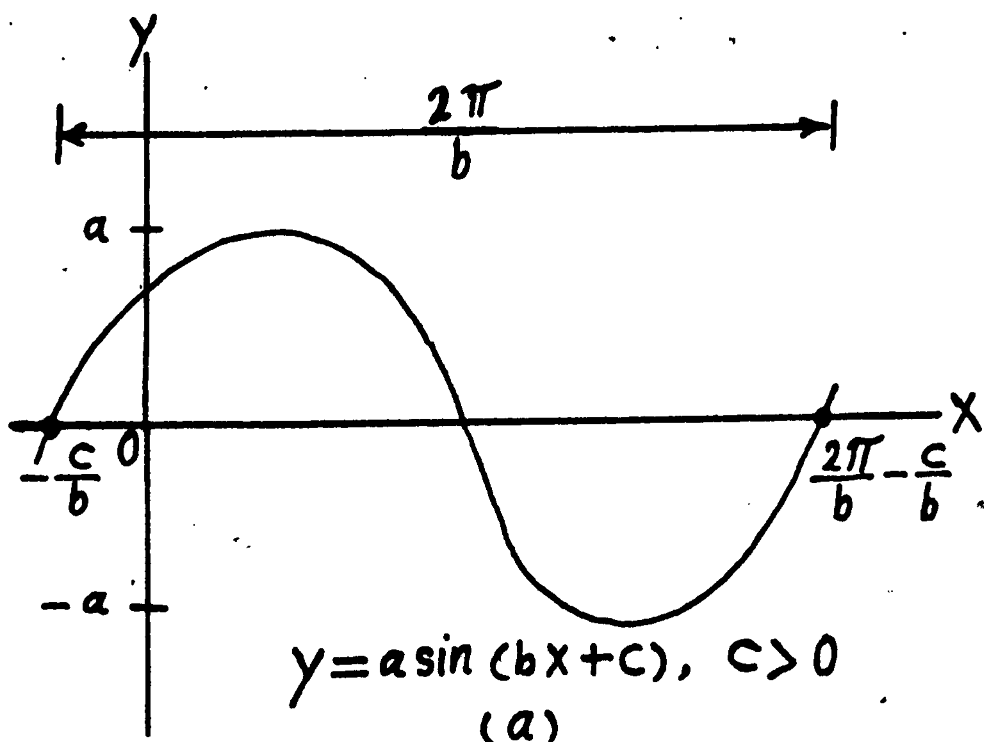
۲ــ پیریود (period) مساوی است به $2\pi/b$

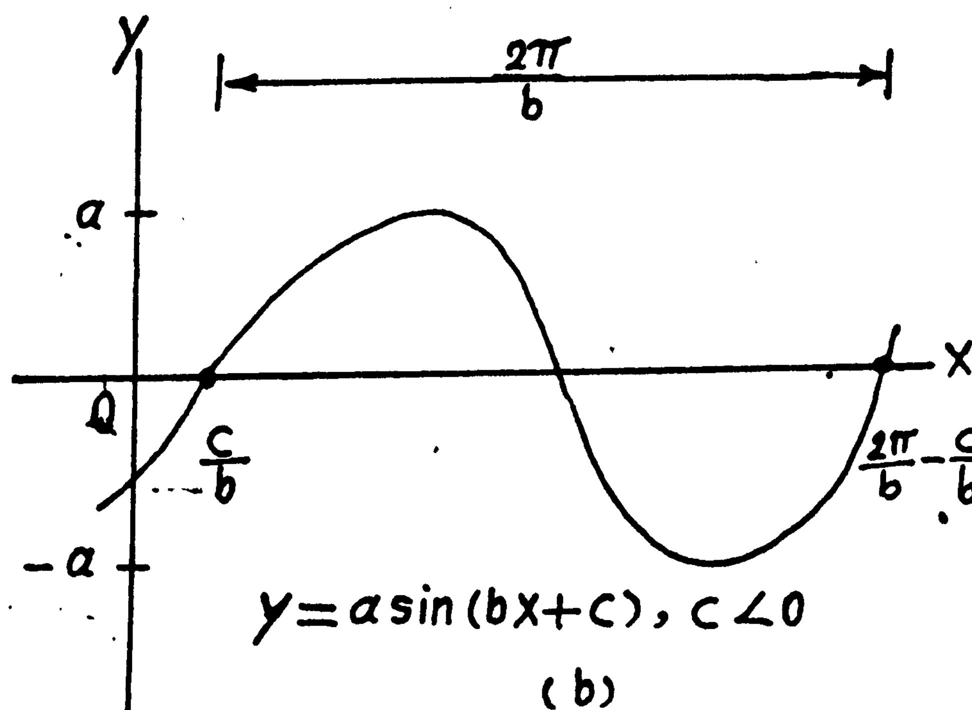
۳ــ تناوب فاز (displ acement) مساوی است به(c/b ــ)

با استفاده از مقدار های که در موارد (۱، ۲، ۳)ارائه گردیده و($\frac{1}{4}$)فاصلهٔ پیریود، به سهولت میتوانیم گراف توابع ساین و کوساین را سکیچ نمائیم .

نمای عمومی گراف{$y = a \sin (bx+c)$}در شکل (۱۲_۳) بصورت واضح نشان داده شده است . ملتفت باید بود ،که تناوب منفی (بطرف چپ) است،درصورتیکه قیمت($C > 0$) باشد.این تغیر تناوب در شکل (a ۱۲_۳) واضح تر ارائه گردیده است .

همچنان تناوب مثبت (بطرف راست) است،در صورتیکه $C < 0$ باشد،و این حالت در شکل(b۱۲_۳) ارائه گردیده است .





شکل (۱۲-۳)
($a>0, b>0$)

مثال ب : گراف تابع"$y=2\sin(3x-\pi)$"را برای قیمت $0 \le x \le \pi$ سکیچ نمائید.

حل : نخست با مطالعه و مقایسهٔ تابع فوق یادداشت های ذیل را نوت میگیریم .

$c=-\pi$ و $b=3$, $a=2$

لهذا دامنهٔ گراف (amplitude) مساوی به (۲)، پیریود مساوی به "$\frac{2\pi}{3}$"، و تناوب مساوی به $-(\frac{-\pi}{3})=\frac{\pi}{3}$ میباشد.

به اساس معلومات فوق گفته میتوانیم که گراف از قیمت "$x=\pi/3$" شروع شده و به اندازهٔ "$2\pi/3$" واحد بطرف راست قیمت(x)دوباره تکرار میگردد.

چارم حصهٔ پیریود، مساوی میشود به $\leftarrow \frac{1}{4}(\frac{2\pi}{3})=\frac{\pi}{6}$ که به اساس آن قیمت های مهم به ترتیب ذیل میباشند:

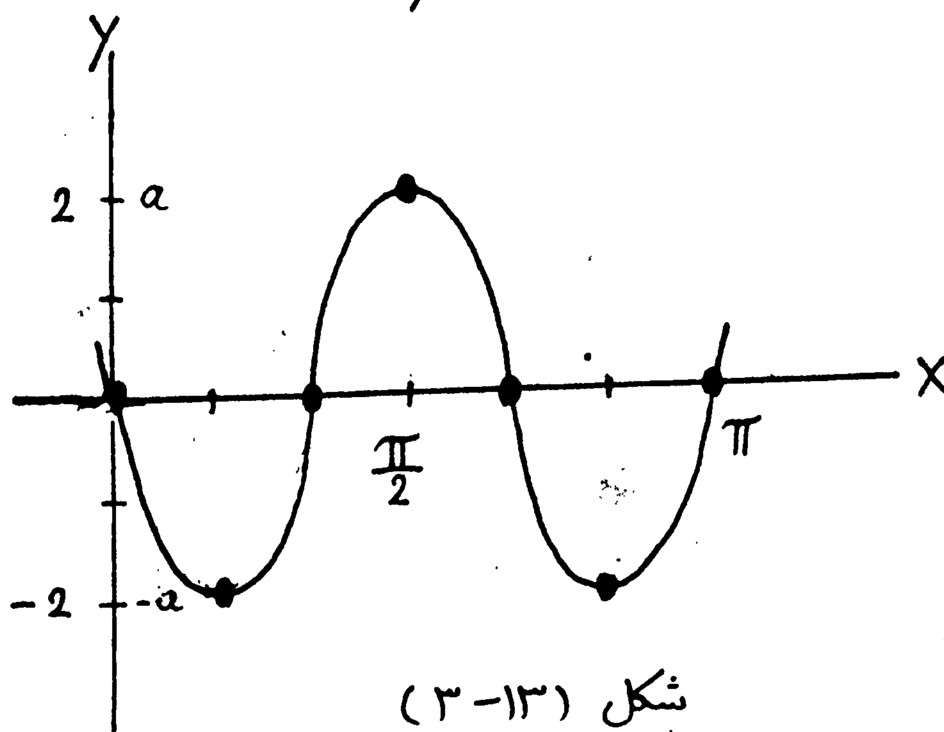
$\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{3}+2(\frac{\pi}{6})=\frac{2}{3}\pi$ ، $\frac{\pi}{3}+3(\frac{\pi}{6})=\frac{5}{6}\pi$

و به همین ترتیب زیاد شده میرود ــ .... $\frac{\pi}{3}+$

گراف این معلومات ، در شکل (۱۳ـ۲) سکیچ شده ، اگر ما گراف را بطرف چپ ادامه بدهیم چون پیریود مساوی است به ($\frac{2}{3}\pi$) لهذا گراف از مبداء محور ها میگذرد.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	-2	0	2	0	-2	0



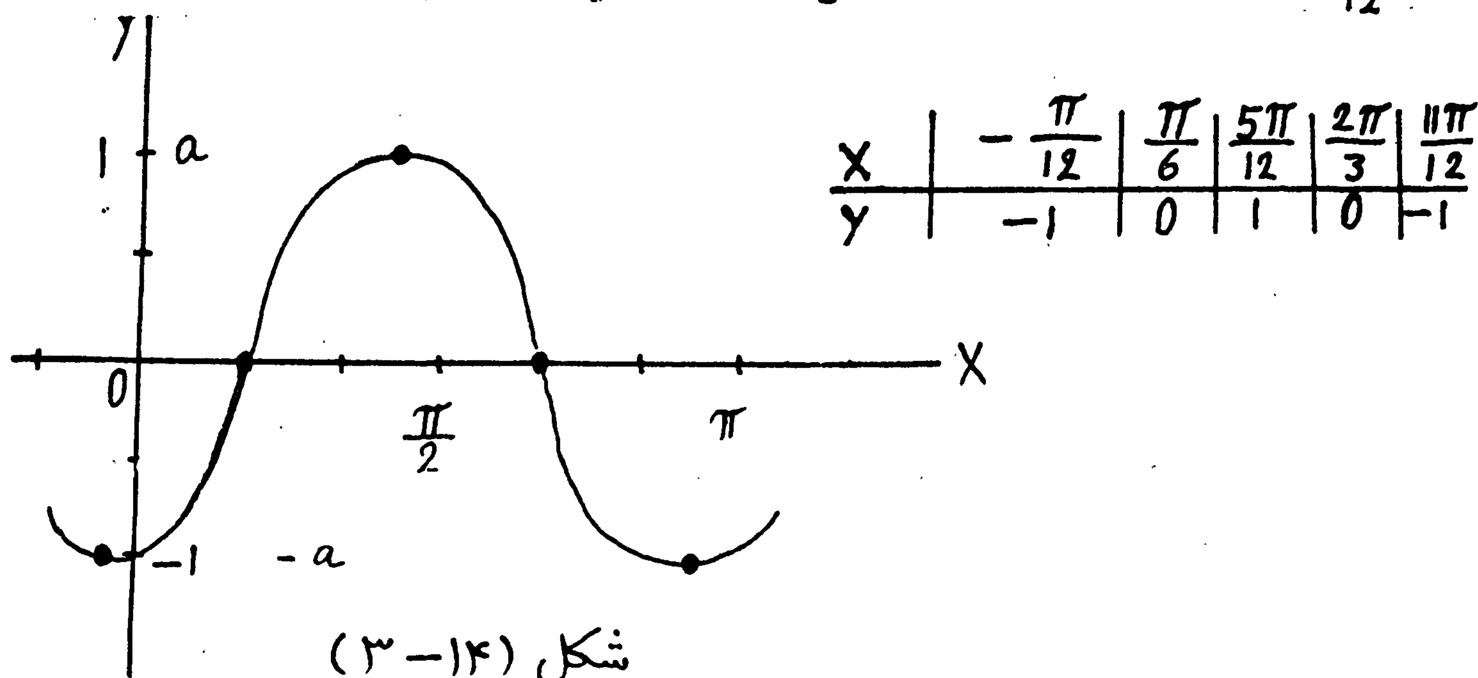
شکل (۱۳-۳)

مثال ج : گراف { $y=-\cos(2x+\frac{\pi}{6})$ } را سکیچ نمائید.

نخست مشاهده میشود که دامنۀ گراف (1-) است، و پیریود مساوی به

$$\frac{2\pi}{2}=\pi$$

میباشد و مقدار تناوب عبارت است از $(-\frac{\pi}{6}\div 2=-\frac{\pi}{12})$ (بطرف چپ ، C > O)، به اساس قیمت های فوق جدول ذیل را بدست می آوریم. البته بادرنظرداشت آنکه گراف بطرف راست، قیمت $\frac{-\pi}{12}$، به اندازۀ (π) واحد شروع میشود. شکل (۱٤_۳)



X	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
y	-1	0	1	0	-1

شکل (۱۴–۳)

مثال د : گراف تابع "$y=2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})$" را سکیچ نمائید .

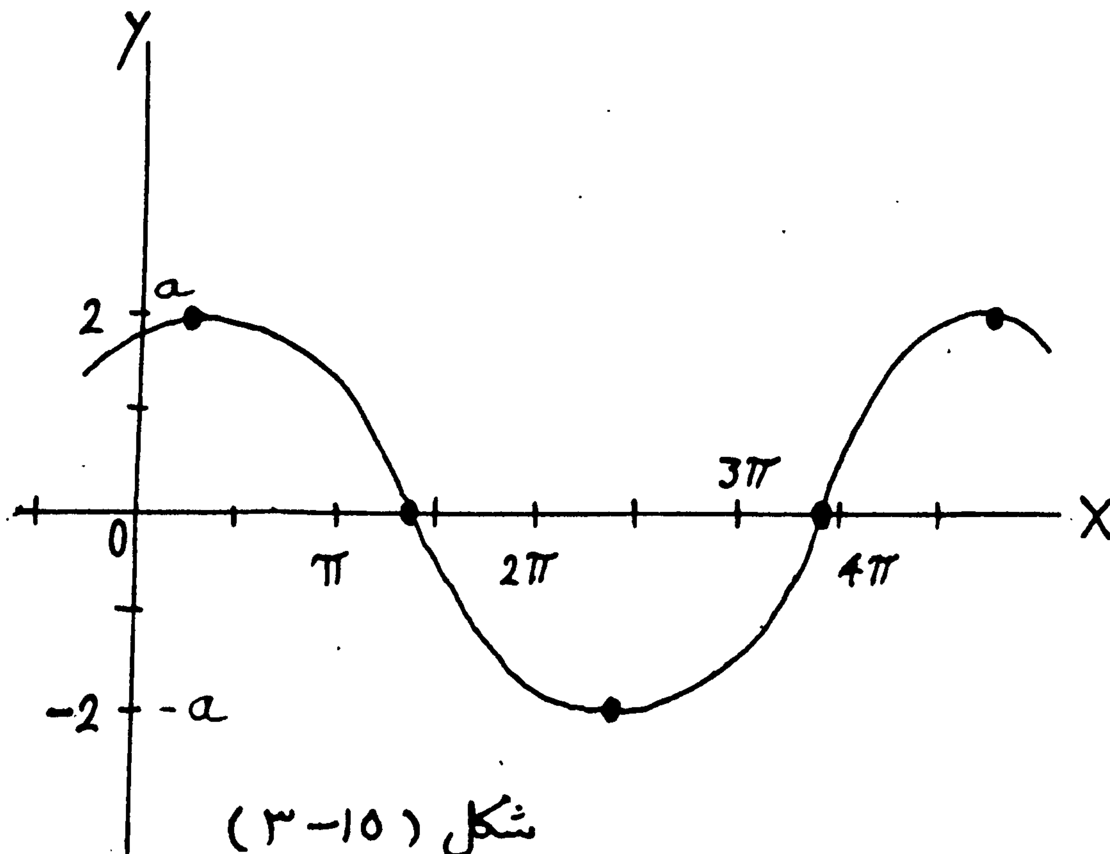
حل : نخست از تابع مشاهده مینمائیم که :

$$a=2\ ,\qquad b=\frac{1}{2}\ ,\qquad C=\frac{-\pi}{6}$$

دامنۀ این گراف (۲)، پیریود $\leftarrow 2\pi\div\frac{1}{2}=4\pi$ میباشد.

و تناوب (displacement) این گراف $\leftarrow \{(-\frac{\pi}{6})\div\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}\}$ است. از قیمت ها و تحلیل های فوق جدول ذیل ترتیب داده میتوانیم. که گراف آن در شکل (۱۵_۳) نشان داده شده است . دوباره یادآوری میشود، وقتیکه ضریب (x) از یک کمتر باشد، پیر از 2π بزرگتر میباشد.

X	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{3}$
y	2	0	-2	0	2



شکل (۱۵– ۳)

مثال د : گراف $y=0.7\sin(\pi x+\frac{\pi}{4})$ را سکیچ نمائید .

حل : تابع فوق در قیمت های ذیل خلاصه میشود :

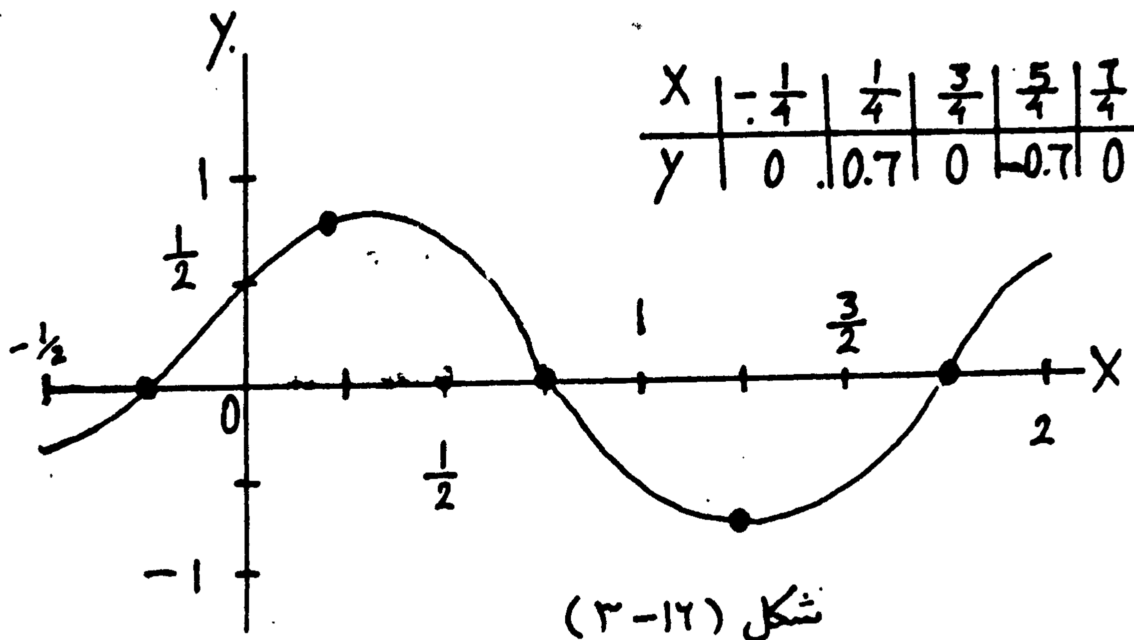
$$C=\frac{\pi}{4}\ ,\qquad b=\pi\ ,\qquad a=0.7$$

میدانیم که دامنهٔ این گراف(۰/۷) و پیریود آن $(\frac{2\pi}{\pi}=2)$ میباشد، و تناوب اش (displacement)

$-c/b$ $-(\frac{\pi}{4})\div\pi=-\frac{1}{4}$ میباشد.

چون (π) عوض قیمت(x)بکار نرفته لهذا تمام اعداد به اعشاری نشان داده شده است، شکل (۱٦_۳):

X	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$
y	0	0.7	0	-0.7	0



شکل (۱٦– ۳)

۲-۳ تمرین فصل سوم :

ازتمرین ۱ الی ۲۴ برای توابع ذیل،دامنه اعظمی (a) پیریود (T) وتناوب را دریافت نمائید بعدا" هر تابع راسکیچ نمائید؟

1. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
2. $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
4. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$
5. $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
6. $y = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
7. $y = -\cos(2x - \pi)$
8. $y = 4\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
9. $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$
10. $y = 2\sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$
11. $y = 3\cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$
12. $y = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$
13. $y = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{8}\right)$
14. $y = -2\sin(2\pi x - \pi)$
15. $y = \frac{3}{4}\cos\left(4\pi x - \frac{\pi}{5}\right)$
16. $y = 6\cos\left(3\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$
17. $y = -0.6\sin(2\pi x - 1)$
18. $y = 1.8\sin\left(\pi x + \frac{1}{3}\right)$
19. $y = 4\cos(3\pi x + 2)$
20. $y = 3\cos(6\pi x - 1)$
21. $y = \sin(\pi^2 x - \pi)$
22. $y = -\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{1}{\pi}\right)$
23. $y = -\frac{3}{2}\cos\left(\pi x + \frac{\pi^2}{6}\right)$
24. $y = \pi\cos\left(\frac{1}{\pi}x + \frac{1}{3}\right)$

۲۵- حرکت یک موج دریک تار، به معادله ذیل ارائه میشود.

$$y = A \sin\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

که درین معادله : a دامنه اعظمی است ، t وقت است که موج حرکت کرده است ، x فاصله ایست از مبداء ، T مدت زمان است . λ ← "طول موج" که موج سفرمیکند. گراف سه سایکل موج را رسم کنید درصورتیکه :
$T = 0.100$ s, $\lambda = 20.0$ cm, $x = 5.00$ cm. $A = 2.00$ cm,
باشند .

۲۶- نماء قطع شده یک موج آب به فورمول ذیل ارائه میگردد. که درین معاله x ، و y به واحد فت اندازه میشوند. گراف این موج را از قرار y درمقابل x برای دو سایکل سکیچ کنید.

$$y = 0.5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

۲۷- درسرکت برقی متناوب ، ولتاژ به معادله ذیل ارائه گردیده . که t وقت به ثانیه است.
گراف این معادله راسکیچ نمائید.

$$y = 120 \cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

مآخذ

REFERENCES:

1. Robert L. Boylestod, Introductory Circuit Analysis, 1987, Merrill Pub. Co.

2. Allyn J. Washington, Basic Technical Mathematic with Calculus, 1985, The Benjamin /Cummings Pub. Co.

3. Alan Van Heuvelen, Physics, 1982, Little, Brown and Co.

4. Barbara T. Faires, J. Douylas Fairs, Calculus, 1988, RANDAM HOUSE.

5. نوت های درسی پوهنځی انجنری پوهنتون کابل توسط : کاریار (۱۳۶۰)

ضمایم :

ضمیمه اول ـ قیمت های توابع مثلثاتی (جدول اول توابع مثلثاتی)

ضمیمهء دوم ـ مربع ، مکعب و جذر اعداد و قیمت های .

ضمیمهء سوم ـ لوگارتم طبیعی .

ضمیمهء چهارم ـ فورمولهای مثلثات و روابط بین توابع مثلثاتی .

ضمیمهء پنجم ـ جدول لوگارتم عام .

ضمیمهء ششم ـ ضریب های تبدیل کردن واحدات فزیك .

ضمیمهء هفتم ـ ثابت های فزیك .

ضمیمهء هشتم ـ جدول دوم توابع مثلثاتی .

ضمیمهء نهم ـ فورمولهای هندسی .

ضمیمهء دهم ـ هندسه و حروف الفبای یونانی .

ضمیمهء یازدهم ـ حروف تواندار .

ضمیمهٔ اول :

جدول مثلثات (جدول-۳)

قیمت های توابع مثلثاتی

Table 3. Four-Place Values of Trigonometric Functions

Degrees	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0°00′	0.0000	1.0000	0.0000	–	90°00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.8	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.9	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.6	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.94	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.75	10
1°00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.29	89°00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.10	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.96	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.19	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.37	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.24	10
2°00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.64	88°00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.43	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.54	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.90	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.47	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.21	10
3°00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.08	87°00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.07	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.17	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.35	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.60	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.92	10
4°00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.30	86°00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.73	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.20	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.71	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.25	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.83	10
5°00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.43	85°00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.06	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.71	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.39	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.08	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.788	10
6°00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.514	84°00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.255	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.010	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.777	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.556	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.345	10
7°00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.144	83°00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.953	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.770	40
30	0.1305	0.9914	0.1317	7.596	30
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.429	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.269	10
8°00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.115	82°00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	Degrees

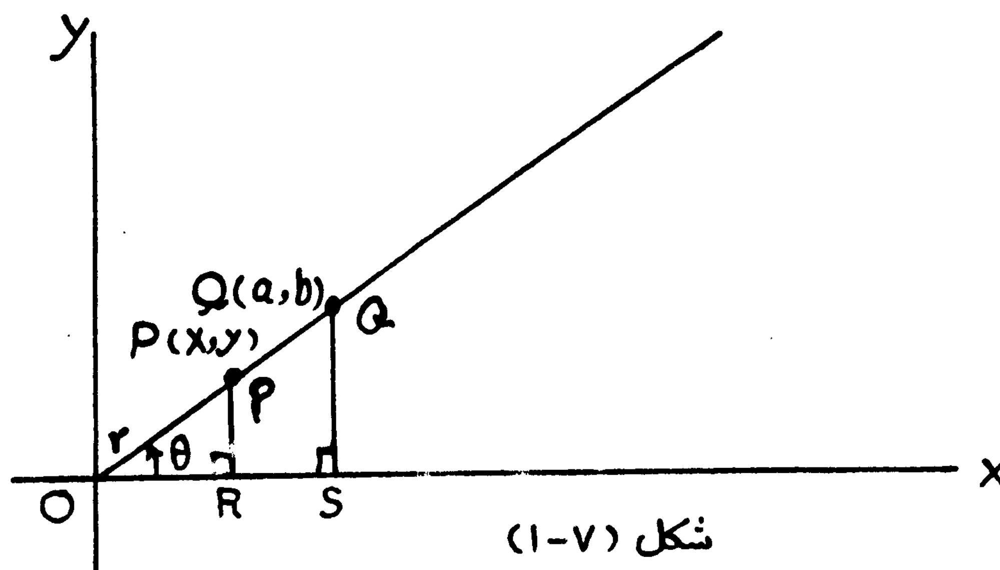
Degrees	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
8°00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.115	82°00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.968	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.827	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.691	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.561	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.435	10
9°00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.314	81°00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.197	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.084	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.976	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.871	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.769	10
10°00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.671	80°00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.576	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.485	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.396	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.309	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.226	10
11°00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.145	79°00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.066	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.989	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.915	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.843	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.773	10
12°00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.705	78°00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.638	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.574	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.511	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.449	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.390	10
13°00′	0.2250	0.9744	[illegible]	4.331	77°00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.275	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.219	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.165	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.113	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.061	10
14°00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.011	76°00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.962	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.914	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.867	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.821	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.776	10
15°00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.732	75°00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.689	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.647	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.606	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.566	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.526	10
16°00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.487	74°00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	Degrees

درمثلث شکل (۶_۱) سه فاصله از نقطهء (O) مهم وقابل توجه است .

آن طول (ضلع) که بالای محور (X) واقع است،بنام ابسیسا(abscissa) یاد میشود، آن (ضلع) که مرتسم عمودی آن بالای محور y میافتد بنام اردینیت (Ordinate)، و ویکتور شعاع (فاصله از نقطه (O) تا به آخرین نقطه(r)) ، بنام ویکتور شعاع (Radius vector) یاد میشود.

مثال :

شکل (۷_۱) ، همان زاویهء θ شکل (۶_۱) نشان میدهد، با تفاوت اینکه به نقاط P و Q قیمت های معین تعین کرده ایم و طول وتر را به r نشان میدهیم . قیمت r باعتبار نقطهء P که عبارت از OP است . و قیمت r باعتبار نقطهء Q، OQ . در شکل (۶_۱) نشان دادیم . مثلث های $\hat{ORP}$ و $\hat{OSQ}$ باهم مشابه اند. در شکل (۷_۱) فاصلهٔ RP (Ordinate) نقطهء P است و OR (abscissa) نقطهٔ P، فاصلهٔ SQ (Ordinate) نقطهٔ Q، و فاصلهٔ OS (abscissa) نقطهٔ Q میباشد.



شکل (۷-۱)

باساس مشابهات مثلث ها داریم :

$$\frac{RP}{OR}=\frac{SQ}{OS}$$

یا به عبارہ دیگر ،

$$\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$$

نسبت (abscissa) و (Ordinate) برای زاویهء θ بالای هرنقطهء وتر عبارت است از : $\frac{x}{y}$

Table 3. Continued (جدول ـ۴) ادامهء قیمت های توابع مثلثاتی

Degrees	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ		Degrees	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
16°00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.487	74°00′	24°00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.246	66°00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.450	50	10	0.4094	0.9124	0.4487	2.229	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.412	40	20	0.4120	0.9112	0.4522	2.211	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.376	30	30	0.4147	0.9100	0.4557	2.194	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.340	20	40	0.4173	0.9088	0.4592	2.177	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.305	10	50	0.4200	0.9075	0.4628	2.161	10
17°00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.271	73°00′	25°00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.145	65°00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.237	50	10	0.4253	0.9051	0.4699	2.128	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.204	40	20	0.4279	0.9038	0.4734	2.112	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.172	30	30	0.4305	0.9026	0.4770	2.097	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.140	20	40	0.4331	0.9013	0.4806	2.081	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.108	10	50	0.4358	0.9001	0.4841	2.066	10
18°00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.078	72°00′	26°00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.050	64°00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.047	50	10	0.4410	0.8975	0.4913	2.035	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.018	40	20	0.4436	0.8962	0.4950	2.020	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.989	30	30	0.4462	0.8949	0.4986	2.006	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.960	20	40	0.4488	0.8936	0.5022	1.991	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.932	10	50	0.4514	0.8923	0.5059	1.977	10
19°00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.904	71°00′	27°00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.963	63°00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.877	50	10	0.4566	0.8897	0.5132	1.949	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.850	40	20	0.4592	0.8884	0.5169	1.935	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.824	30	30	0.4617	0.8870	0.5206	1.921	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.798	20	40	0.4643	0.8857	0.5243	1.907	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.773	10	50	0.4669	0.8843	0.5280	1.894	10
20°00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.747	70°00′	28°00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.881	62°00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.723	50	10	0.4720	0.8816	0.5354	1.868	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.699	40	20	0.4746	0.8802	0.5392	1.855	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.675	30	30	0.4772	0.8788	0.5430	1.842	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.651	20	40	0.4797	0.8774	0.5467	1.829	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.628	10	50	0.4823	0.8760	0.5505	1.816	10
21°00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.605	69°00′	29°00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.804	61°00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.583	50	10	0.4874	0.8732	0.5581	1.792	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.560	40	20	0.4899	0.8718	0.5619	1.780	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.539	30	30	0.4924	0.8704	0.5658	1.767	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.517	20	40	0.4950	0.8689	0.5696	1.756	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.496	10	50	0.4975	0.8675	0.5735	1.744	10
22°00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.475	68°00′	30°00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.732	60°00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.455	50	10	0.5025	0.8646	0.5812	1.720	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.434	40	20	0.5050	0.8631	0.5851	1.709	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.414	30	30	0.5075	0.8616	0.5890	1.698	30
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.394	20	40	0.5100	0.8601	0.5930	1.686	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.375	10	50	0.5125	0.8587	0.5969	1.675	10
23°00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.356	67°00′	31°00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.664	59°00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.337	50	10	0.5175	0.8557	0.6048	1.653	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.318	40	20	0.5200	0.8542	0.6088	1.643	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.300	30	30	0.5225	0.8526	0.6128	1.632	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.282	20	40	0.5250	0.8511	0.6168	1.621	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.264	10	50	0.5275	0.8496	0.6208	1.611	10
24°00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.246	66°00′	32°00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.600	58°00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	Degrees		Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	Degrees

جدول مثلثات

Table 3. Continued (جدول - ۴) ادامهء قیمت های توابع مثلثاتی

Degrees	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
32°00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.600	58°00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.590	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.580	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.570	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.560	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.550	10
33°00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.540	57°00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.530	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.520	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.511	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.501	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.492	10
34°00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.483	56°00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.473	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.464	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.455	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.446	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.437	10
35°00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.428	55°00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.419	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.411	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.402	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.393	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.385	10
36°00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.376	54°00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.368	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.360	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.351	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.343	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.335	10
37°00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.327	53°00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.319	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.311	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.303	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.295	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.288	10
38°00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.280	52°00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.272	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.265	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.257	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.250	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.242	10
39°00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.235	51°00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	Degrees

Degrees	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
39°00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.235	51°00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.228	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.220	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.213	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.206	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.199	10
40°00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.192	50°00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.185	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.178	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.171	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.164	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.157	10
41°00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.150	49°00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.144	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.137	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.130	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.124	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.117	10
42°00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.111	48°00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.104	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.098	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.091	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.085	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.079	10
43°00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.072	47°00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.066	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.060	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.054	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.048	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.042	10
44°00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.036	46°00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.030	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.024	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.018	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.012	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.006	10
45°00′	0.7071	0.7071	1.000	1.000	45°00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	Degrees

ضمیمهء دوم :

Table 1. Powers and Roots جدول مربع ـ مکعب ـ و جذر اعداد و قیمتها

عدد No.	مربع Sq.	جذر مربع Sq. Root	مکعب Cube	جذر مکعب Cube Root	عدد No.	مربع Sq.	جذر مربع Sq. Root	مکعب Cube	جذر مکعب Cube Root
1	1	1.000	1	1.000	51	2 601	7.141	132 651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2 704	7.211	140 608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	53	2 809	7.280	148 877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2 916	7.348	157 464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3 025	7.416	166 375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3 136	7.483	175 616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3 249	7.550	185 193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	58	3 364	7.616	195 112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3 481	7.681	205 379	3.893
10	100	3.162	1 000	2.154	60	3 600	7.746	216 000	3.915
11	121	3.317	1 331	2.224	61	3 721	7.810	226 981	3.936
12	144	3.464	1 728	2.289	62	3 844	7.874	238 328	3.958
13	169	3.606	2 197	2.351	63	3 969	7.937	250 047	3.979
14	196	3.742	2 744	2.410	64	4 096	8.000	262 144	4.000
15	225	3.873	3 375	2.466	65	4 225	8.062	274 625	4.021
16	256	4.000	4 096	2.520	66	4 356	8.124	287 496	4.041
17	289	4.123	4 913	2.571	67	4 489	8.185	300 763	4.062
18	324	4.243	5 832	2.621	68	4 624	8.246	314 432	4.082
19	361	4.359	6 859	2.668	69	4 761	8.307	328 509	4.102
20	400	4.472	8 000	2.714	70	4 900	8.367	343 000	4.121
21	441	4.583	9 261	2.759	71	5 041	8.426	357 911	4.141
22	484	4.690	10 648	2.802	72	5 184	8.485	373 248	4.160
23	529	4.796	12 167	2.844	73	5 329	8.544	389 017	4.179
24	576	4.899	13 824	2.884	74	5 476	8.602	405 224	4.198
25	625	5.000	15 625	2.924	75	5 625	8.660	421 875	4.217
26	676	5.099	17 576	2.962	76	5 776	8.718	438 976	4.236
27	729	5.196	19 683	3.000	77	5 929	8.775	456 533	4.254
28	784	5.292	21 952	3.037	78	6 084	8.832	474 552	4.273
29	841	5.385	24 389	3.072	79	6 241	8.888	493 039	4.291
30	900	5.477	27 000	3.107	80	6 400	8.944	512 000	4.309
31	961	5.568	29 791	3.141	81	6 561	9.000	531 441	4.327
32	1 024	5.657	32 768	3.175	82	6 724	9.055	551 368	4.344
33	1 089	5.745	35 937	3.208	83	6 889	9.110	571 787	4.362
34	1 156	5.831	39 304	3.240	84	7 056	9.165	592 704	4.380
35	1 225	5.916	42 875	3.271	85	7 225	9.220	614 125	4.397
36	1 296	6.000	46 656	3.302	86	7 396	9.274	636 056	4.414
37	1 369	6.083	50 653	3.332	87	7 569	9.327	658 503	4.431
38	1 444	6.164	54 872	3.362	88	7 744	9.381	681 472	4.448
39	1 521	6.245	59 319	3.391	89	7 921	9.434	704 969	4.465
40	1 600	6.325	64 000	3.420	90	8 100	9.487	729 000	4.481
41	1 681	6.403	68 921	3.448	91	8 281	9.539	753 571	4.498
42	1 764	6.481	74 088	3.476	92	8 464	9.592	778 688	4.514
43	1 849	6.557	79 507	3.503	93	8 649	9.644	804 357	4.531
44	1 936	6.633	85 184	3.530	94	8 836	9.695	830 584	4.547
45	2 025	6.708	91 125	3.557	95	9 025	9.747	857 375	4.563
46	2 116	6.782	97 336	3.583	96	9 216	9.798	884 736	4.579
47	2,209	6.856	103 823	3.609	97	9 409	9.849	912 673	4.595
48	2 304	6.928	110 592	3.634	98	9 604	9.899	941 192	4.610
49	2 401	7.000	117 649	3.659	99	9 801	9.950	970 299	4.626
50	2 500	7.071	125 000	3.684	100	10 000	10.000	1 000 000	4.642

ضمیمهء سوم :

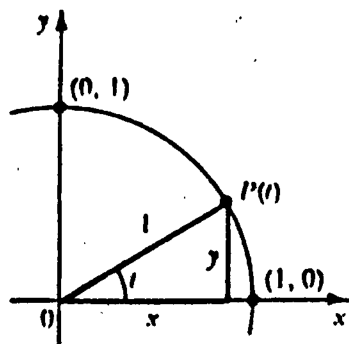
لوگارتم طبیعی

Table 4. Natural Logarithms and Exponential Functions

x	$\ln x$	e^x	e^{-x}	x	$\ln x$	e^x	e^{-x}	x	$\ln x$	e^x	e^{-x}
0.0		1.0000	1.0000	4.5	1.5041	90.017	0.0111	9.0	2.1972	8,103	0.0001
0.1	−2.3026	1.1052	0.9048	4.6	1.5261	99.484	0.0101	9.1	2.2083	8,955	
0.2	−1.6094	1.2214	0.8187	4.7	1.5476	109.95	0.0091	9.2	2.2192	9,897	
0.3	−1.2040	1.3499	0.7408	4.8	1.5686	121.51	0.0082	9.3	2.2300	10,938	
0.4	−0.9163	1.4918	0.6703	4.9	1.5892	134.29	0.0074	9.4	2.2407	12,088	
0.5	−0.6931	1.6487	0.6065	5.0	1.6094	148.41	0.0067	9.5	2.2513	13,360	0.00007
0.6	−0.5108	1.8221	0.5488	5.1	1.6292	164.02	0.0061	9.6	2.2618	14,765	
0.7	−0.3567	2.0138	0.4966	5.2	1.6487	181.27	0.0055	9.7	2.2721	16,318	
0.8	−0.2231	2.2255	0.4493	5.3	1.6677	200.34	0.0050	9.8	2.2824	18,034	
0.9	−0.1054	2.4596	0.4066	5.4	1.6864	221.41	0.0045	9.9	2.2925	19,930	
1.0	0.0000	2.7183	0.3679	5.5	1.7047	244.69	0.0041	10	2.3026	22,026	4.5×10^{-5}
1.1	0.0953	3.0042	0.3329	5.6	1.7228	270.43	0.0037	15	2.7081		
1.2	0.1823	3.3201	0.3012	5.7	1.7405	298.87	0.0033	20	2.9957	4.9×10^{8}	2.1×10^{-9}
1.3	0.2624	3.6693	0.2725	5.8	1.7579	330.30	0.0030	25	3.2189		
1.4	0.3365	4.0552	0.2466	5.9	1.7750	365.04	0.0027	30	3.4012	1.1×10^{13}	9.4×10^{-14}
1.5	0.4055	4.4817	0.2231	6.0	1.7918	403.43	0.0025	35	3.5553		
1.6	0.4700	4.9530	0.2019	6.1	1.8083	445.86		40	3.6889	2.4×10^{17}	4.2×10^{-18}
1.7	0.5306	5.4739	0.1827	6.2	1.8245	492.75		45	3.8067		
1.8	0.5878	6.0496	0.1653	6.3	1.8405	544.57		50	3.9120	5.2×10^{21}	1.9×10^{-22}
1.9	0.6419	6.6859	0.1496	6.4	1.8563	601.85		55	4.0073		
2.0	0.6931	7.3891	0.1353	6.5	1.8718	665.14	0.0015	60	4.0943	1.1×10^{26}	8.8×10^{-27}
2.1	0.7419	8.1662	0.1225	6.6	1.8871	735.10		70	4.2485		
2.2	0.7885	9.0250	0.1108	6.7	1.9021	812.41		80	4.3820	5.5×10^{34}	1.8×10^{-35}
2.3	0.8329	9.9742	0.1003	6.8	1.9169	897.85		90	4.4998		
2.4	0.8755	11.023	0.0907	6.9	1.9315	992.27		100	4.6052	2.7×10^{43}	3.7×10^{-44}
2.5	0.9163	12.182	0.0821	7.0	1.9459	1097	0.0009				
2.6	0.9555	13.464	0.0743	7.1	1.9601	1212					
2.7	0.9933	14.880	0.0672	7.2	1.9741	1339					
2.8	1.0296	16.445	0.0608	7.3	1.9879	1480					
2.9	1.0647	18.174	0.0550	7.4	2.0015	1636					
3.0	1.0986	20.086	0.0498	7.5	2.0149	1808	0.0006				
3.1	1.1314	22.198	0.0450	7.6	2.0281	1998					
3.2	1.1632	24.533	0.0408	7.7	2.0412	2208					
3.3	1.1939	27.113	0.0369	7.8	2.0541	2441					
3.4	1.2238	29.964	0.0334	7.9	2.0669	2697					
3.5	1.2528	33.115	0.0302	8.0	2.0794	2981	0.0003				
3.6	1.2809	36.598	0.0273	8.1	2.0919	3294					
3.7	1.3083	40.447	0.0247	8.2	2.1041	3641					
3.8	1.3350	44.701	0.0224	8.3	2.1163	4024					
3.9	1.3610	49.402	0.0202	8.4	2.1282	4447					
4.0	1.3863	54.598	0.0183	8.5	2.1401	4915	0.0002				
4.1	1.4110	60.340	0.0166	8.6	2.1518	5432					
4.2	1.4351	66.686	0.0150	8.7	2.1633	6003					
4.3	1.4586	73.700	0.0136	8.8	2.1748	6634					
4.4	1.4816	81.451	0.0123	8.9	2.1861	7332					

ln 10	2.3026
2 ln 10	4.6052
3 ln 10	6.9078
4 ln 10	9.2103
5 ln 10	11.5129

▶ TRIGONOMETRY — فورمولهای مثلثات و روابط بین توابع مثلثاتی



$\sin t = y$

$\cos t = x$

$\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{y}{x}$

$\cot t = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \dfrac{x}{y}$

$\sec t = \dfrac{1}{\cos t} = \dfrac{1}{x}$

$\csc t = \dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{y}$

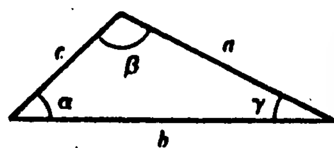
$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$
$1 + \tan^2 t = \sec^2 t$
$1 + \cot^2 t = \csc^2 t$

$\sin(-t) = -\sin t$
$\cos(-t) = \cos t$
$\tan(-t) = -\tan t$

$\cot(-t) = -\cot t$
$\sec(-t) = \sec t$
$\csc(-t) = -\csc t$

$\sin(t_1 \pm t_2) = \sin t_1 \cos t_2 \pm \cos t_1 \sin t_2$
$\cos(t_1 \pm t_2) = \cos t_1 \cos t_2 \mp \sin t_1 \sin t_2$
$\tan(t_1 \pm t_2) = \dfrac{\tan t_1 \pm t_2}{1 \mp \tan t_1 \tan t_2}$

$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$
$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$
$\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2} \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos 2t}{2}$



Law of Sines: $\dfrac{\sin \alpha}{a} = \dfrac{\sin \beta}{b} = \dfrac{\sin \gamma}{c}$ — قانون ساین

Law of Cosines: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ — قانون کوساین

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin t	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1	0
cos t	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	−1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	−1	0	1
tan t	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	−1	$-\sqrt{3}/3$	0	—	0
csc t	—	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	—	−1	—
sec t	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	—	−2	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$	−1	—	1
cot t	—	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	−1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

Table 2. Four-Place Logarithms — جدول لوگارتم عام (چارقمی)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Table 2. Continued ادامه جدول لوگارتم

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

ضمیمهٔ ششم :

CONVERSION FACTORS ضریبهای تبدیل کردن واحدات فزیك

Length طول

1 in = 2.54 cm
1 cm = 0.394 in
1 ft = 30.5 cm
1 m = 39.4 in = 3.28 ft
1 mi = 5280 ft = 1609 m
1 km = 0.621 mi
1 angstrom (Å) = 10^{-10} m
1 light-year = 9.46 x 10^{15} m

Volume حجم

1 liter = 1000 cm^3 = 0.0351 ft^3 = 61.02 in^3
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 liters = 7.477 gallons
1 gallon = 3.79 liters

Speed سرعت

1 mi/h = 1.47 ft/s = 1.61 km/h = 0.447 m/s
1 km/h = 0.278 m/s = 0.621 mi/h
1 ft/s = 0.305 m/s = 0.682 mi/h
1 m/s = 3.28 ft/s = 3.60 km/h

Mass کتله

1 atomic mass unit (u) = 1.660 x 10^{-27} kg
1 slug = 14.6 kg
1 kg = 0.0685 slug
(1 kg has a weight of 2.21 lb for g = 9.81 m/s^2.)

Force قوه

1 lb = 4.45 N
1 N = 0.225 lb

Energy and Work کار وانرژی

1 J = 10^7 ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.180 J
1 ft · lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal
1 eV = 1.60 x 10^{-19} J
1 kWh = 3.60 x 10^6 J

Power توان

1 W = 1 J/s = 0.738 ft · lb/s
1 hp (U.S.) = 550 ft · lb/s = 746 W
1 hp (metric) = 750 W
1 Btu/hr = 0.293 W

Pressure فشار

1 atm = 1.01 bar = 1.01 x 10^5 N/m^2 = 14.7 lb/in^2 = 760 torr
1 lb/in^2 = 6.90 x 10^3 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.45 x 10^{-4} lb/in^2

PHYSICAL CONSTANTS ثابت های فزیک

Speed of light	$c = 3.00 \times 10^{8}$ m/sec
Gravitational constant	$G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Avogadro's number	$N_A = 6.023 \times 10^{23}$ particles/g · atom
Boltzmann's constant	$k = 1.3806 \times 10^{-23}$ J/K
Gas constant	$R = 8.314$ J/g · mole · K
	= 1.9872 cal/g · mole · K
Planck's constant	$h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · sec
Electron charge	$e = 1.60 \times 10^{-19}$ C
Electron rest mass	$m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
	$= 5.4858 \times 10^{-4}$ u
Proton rest mass	$m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
	= 1.00727 u
Neutron rest mass	$m_n = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
	= 1.00866 u
Coulomb's law constant	$k = 9.0 \times 10^{9}$ N · m²/C²
Permeability constant	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A²
Standard gravitational acceleration	$g = 9.81$ m/s² = 32.17 ft/s²
Mass of earth	5.98×10^{24} kg
Average radius of earth	6.38×10^{6} m
Average density of earth	5570 kg/m³
Average earth-moon distance	3.84×10^{8} m
Average earth-sun distance	1.496×10^{11} m
Mass of sun	1.99×10^{30} kg
Radius of sun	7×10^{8} m

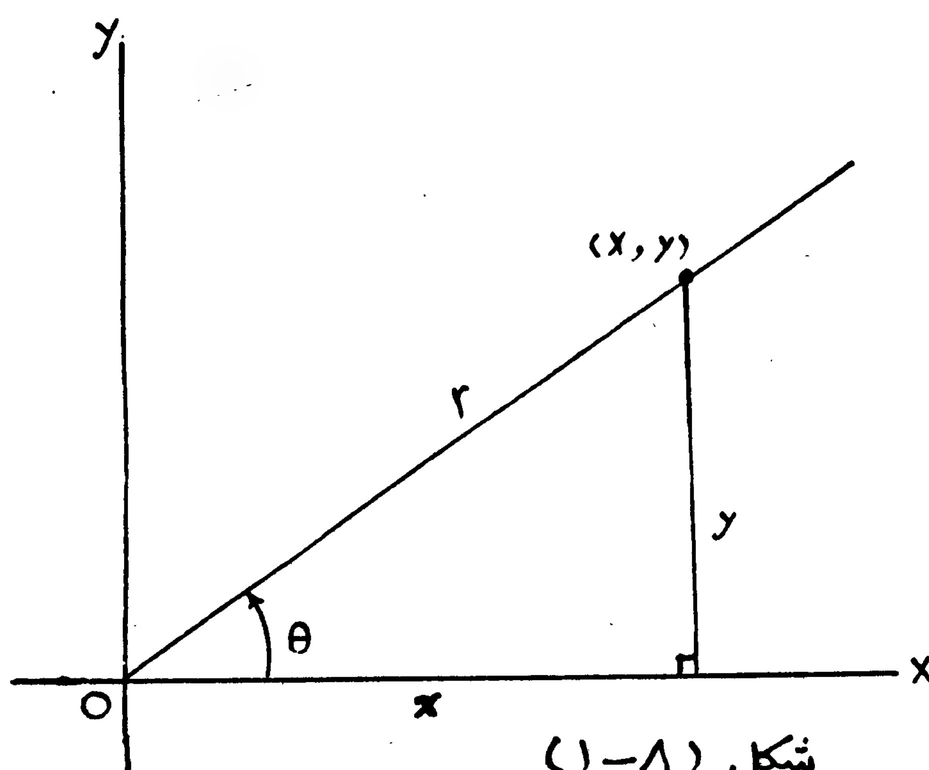
SINES, COSINES, AND TANGENTS

Angle	Sine	Cosine	Tangent	Angle	Sine	Cosine	Tangent
0°	0.000	1.000	0.000				
1°	.017	1.000	.017	46°	0.719	0.695	1.036
2°	.035	0.999	.035	47°	.731	.682	1.072
3°	.052	.999	.052	48°	.743	.669	1.111
4°	.070	.998	.070	49°	.755	.656	1.150
5°	.087	.996	.087	50°	.766	.643	1.192
6°	.105	.995	.105	51°	.777	.629	1.235
7°	.122	.993	.123	52°	.788	.616	1.280
8°	.139	.990	.141	53°	.799	.602	1.327
9°	.156	.988	.158	54°	.809	.588	1.376
10°	.174	.985	.176	55°	.819	.574	1.428
11°	.191	.982	.194	56°	.829	.559	1.483
12°	.208	.978	.213	57°	.839	.545	1.540
13°	.225	.974	.231	58°	.848	.530	1.600
14°	.242	.970	.249	59°	.857	.515	1.664
15°	.259	.966	.268	60°	.866	.500	1.732
16°	.276	.961	.287	61°	.875	.485	1.804
17°	.292	.956	.306	62°	.883	.469	1.881
18°	.309	.951	.325	63°	.891	.454	1.963
19°	.326	.946	.344	64°	.899	.438	2.050
20°	.342	.940	.364	65°	.906	.423	2.145
21°	.358	.934	.384	66°	.914	.407	2.246
22°	.375	.927	.404	67°	.921	.391	2.356
23°	.391	.921	.424	68°	.927	.375	2.475
24°	.407	.914	.445	69°	.934	.358	2.605
25°	.423	.906	.466	70°	.940	.342	2.747
26°	.438	.899	.488	71°	.946	.326	2.904
27°	.454	.891	.510	72°	.951	.309	3.078
28°	.469	.883	.532	73°	.956	.292	3.271
29°	.485	.875	.554	74°	.961	.276	3.487
30°	.500	.866	.577	75°	.966	.259	3.732
31°	.515	.857	.601	76°	.970	.242	4.011
32°	.530	.848	.625	77°	.974	.225	4.331
33°	.545	.839	.649	78°	.978	.208	4.705
34°	.559	.829	.675	79°	.982	.191	5.145
35°	.574	.819	.700	80°	.985	.174	5.671
36°	.588	.809	.727	81°	.988	.156	6.314
37°	.602	.799	.754	82°	.990	.139	7.115
38°	.616	.788	.781	83°	.993	.122	8.144
39°	.629	.777	.810	84°	.995	.105	9.514
40°	.643	.766	.839	85°	.996	.087	11.43
41°	.656	.755	.869	86°	.998	.070	14.30
42°	.669	.743	.900	87°	.999	.052	19.08
43°	.682	.731	.933	88°	.999	.035	28.64
44°	.695	.719	.966	89°	1.000	.017	57.29
45°	.707	.707	1.000	90°	1.000	.000	∞

برای زاویهٔ کیفی θ که در حالت ستندارد باشد، شش نسبت مختلف را میتوانیم برقرار نمائیم . که بنابر مشابه بودن مثلث ها، این نسبت ها باهم مساوی میباشند بدون آنکه انتهای ——— وتر مشخص باشد .

برای زاویه های مختلف باداشتن وتر های متفاوت ، قیمت های گوناگون بدست می آید. به عبارهٔ دیگر: این نسبت ها مربوط به موقعیت وتر مثلث است، که در کدام ربع موقعیت دارد.

یا اینکه ، نسبت های مذکور مربوط به اندازهٔ زاویه یا تابع زاویه است، و این توابع را بنام توابع مثلثاتی یاد میکنند، که در شکل (۸ـ۱) ارائه گردیده است .



شکل (۸ـ۱)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\text{secant}\,\theta = \frac{r}{x} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

درین فصل ما توجه خودرا صرف به توابع مثلثاتی ای زاویه های (حاده) معطوف میسازیم .

در حالیکه تعریفات فوق (تعریف توابع شش گانهٔ مثلثاتی) برای هرزاویه صدق میکند. جهت سهولت، این تعریفات را طورخلاصه قرار ذیل مینویسند:

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \ , \quad \cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \ , \quad \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

تعریف توابع شش گانهٔ مثلثاتی که در شکل (۸ـ۱) ارائه شده ، اساس مثلثات را

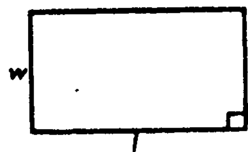
ضمیمهء نهم :

فورمولهای هندسی

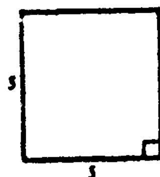
GEOMETRIC FORMULAS

Plane Geometry

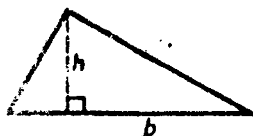
Rectangle
Area: $A = lw$
Perimeter: $P = 2l + 2w$



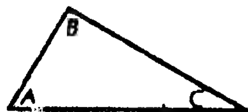
Square
Area: $A = s^2$
Perimeter: $P = 4s$



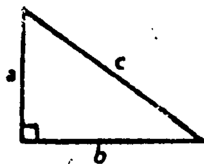
Triangle
Area: $A = \frac{1}{2}bh$



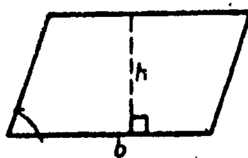
Sum of Angle Measures:
$A + B + C = 180°$



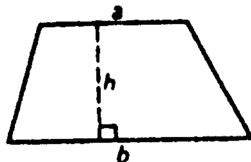
Right Triangle
Pythagorean Theorem (Equation):
$a^2 + b^2 = c^2$



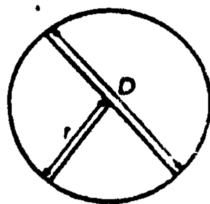
Parallelogram
Area: $A = bh$



Trapezoid
Area: $A = \frac{1}{2}h(a + b)$

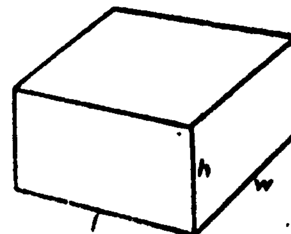


Circle
Area: $A = \pi r^2$
Circumference:
$C = \pi D = 2\pi r$
($\frac{22}{7}$ and 3.14 are different approximations for π)

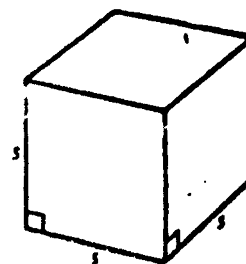


Solid Geometry

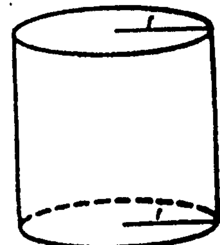
Rectangular Solid
Volume: $V = lwh$



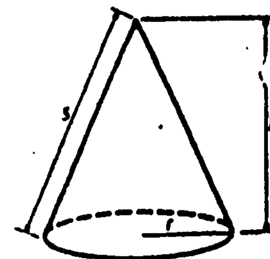
Cube
Volume: $V = s^3$



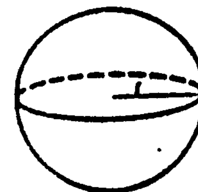
Right Circular Cylinder
Volume: $V = \pi r^2 h$
Lateral Surface Area:
$L = 2\pi rh$
Total Surface Area:
$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$



Right Circular Cone
Volume: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Lateral Surface Area:
$L = \pi rs$
Total Surface Area:
$S = \pi r^2 + \pi rs$
Slant Height:
$s = \sqrt{r^2 + h^2}$

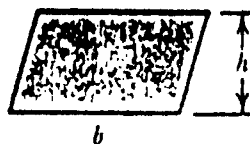


Sphere
Volume: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Surface Area: $S = 4\pi r^2$



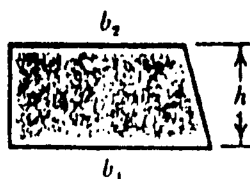
▶ GEOMETRY فورمولهای هندسه

PARALLELOGRAM



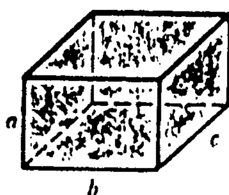
Area:
$A = bh$

TRAPEZOID



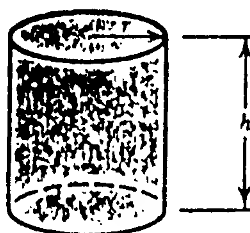
Area:
$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$

PARALLELEPIPED



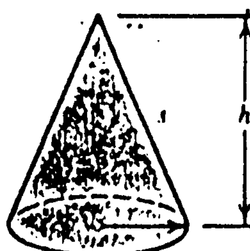
Volume:
$V = abc$
Surface Area:
$A = 2(ab + ac + bc)$

RIGHT CIRCULAR CYLINDER



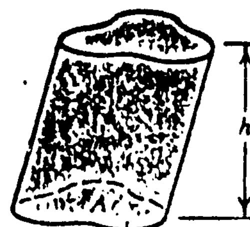
Volume:
$V = \pi r^2 h$
Lateral Surface Area:
$A = 2\pi rh$

RIGHT CIRCULAR CONE



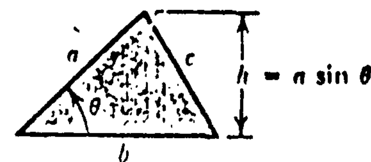
Volume:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Lateral Surface Area:
$A = \pi rs = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

GENERAL CYLINDER



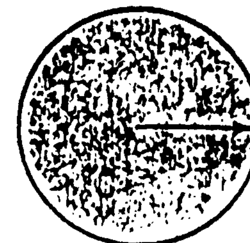
Volume:
$V = (\text{Area of base})h$

TRIANGLE



Perimeter:
$P = a + b + c$
Area:
$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}\sqrt{P(P-2a)(P-2b)(P-2c)}$

CIRCLE



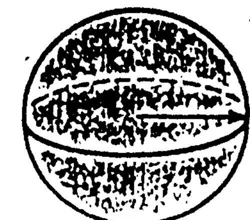
Area:
$A = \pi r^2$
Circumference:
$C = 2\pi r$

CIRCULAR SECTOR



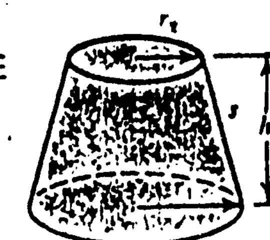
Area:
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$
Sector Length
$S = r\theta$

SPHERE



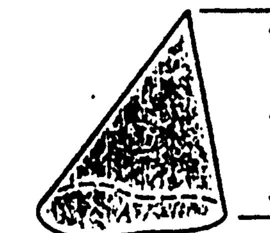
Volume:
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Area:
$A = 4\pi r^2$

FRUSTRUM OF A RIGHT CIRCULAR CONE



Volume:
$V = \frac{1}{3}\pi(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
Lateral Surface Area:
$A = \pi(r_1 + r_2)s$

GENERAL CONE OR PYRAMID



Volume:
$V = \frac{1}{3}(\text{Area of base})h$

▶ THE GREEK ALPHABET الفبا' یونانی

Alpha	A	α	Eta	H	η	Nu	N	ν	Tau	T	τ
Beta	B	β	Theta	Θ	θ	Xi	Ξ	ξ	Upsilon	Υ	υ
Gamma	Γ	γ	Iota	I	ι	Omicron	O	ο	Phi	Φ	φ
Delta	Δ	δ	Kappa	K	κ	Pi	Π	π	Chi	X	χ
Epsilon	E	ϵ	Lambda	Λ	λ	Rho	P	ρ	Psi	Ψ	ψ
Zeta	Z	ζ	Mu	M	μ	Sigma	Σ	σ	Omega	Ω	ω



University of Nebraska at Omaha

Education Sector Support Project

Trigonometry



Prepared & Translated

By

Nazar M. Karyar

MANPOWER TRAINING PROGRAM

SEPTEMBER 1990

ضمیمهٔ یازدهم : ۱۳۳

حروف تواندار:

POWER OF TEN PREFIXES

Prefix	Abbrev.	Value
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hecto	h	10^{2}
Deka	da	10^{1}
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Micro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Pico	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

بعضی معلومات مفید

SOME USEFUL FACTS

Area of circle (radius r)	πr^2
Area of sphere (radius r)	$4\pi r^2$
Volume of sphere	$4\pi r^3/3$
Density of dry air (STP)	1.293 kg/m³
Density of water (4° C)	1000 kg/m³
Speed of sound in air (0° C)	331.4 m/sec

Trig definitions:

$\sin\theta$ = (opposite side)/(hypotenuse)

$\cos\theta$ = (adjacent side)/(hypotenuse)

$\tan\theta$ = (opposite side)/(adjacent side)

Quadratic equation:

$$0 = ax^2 + bx + c,$$

$$\text{where } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

بنیان میگذارد. در تعریفات فوق اگر مخرج کسر صفر شود، قیمت آن توابع (لایتناهی) یعنی نامحدود میشود.

چنانچه قیمت tan، و sec به لایتناهی (∞) میرسد وقتیکه قیمت x مساوی صفر شوده و همچنان در مورد Cot، Csc قیمت تابع لایتناهی میشودوقتیکه y مساوی به صفر شود.

بخاطر داشته باشید که، قیمت r همیش مثبت است ($r > o$)، x و y امکان دارد که قیمت صفر بگیرد، اما (r) به هیچ صورت صفر شده نمیتواند. زیرا؛ وقتیکه (r) قیمت صفر بگیرد، درانصورت هیچ یك زاویه تشکیل نمیشود.

در مثال های ذیل ، ما قیمت مشخص توابع مثلثاتی را دریافت خواهیم کرد.

اما فراموش نباید کرد که قیمت ها و سمبول هارا بصورت درست تحریر کنیم، مثلاً $\sin\theta = 0.525$ دارای مفهوم مثلثاتی است، اما اگر نوشته شود: $\sin = 0.525$ این افاده کدام مفهوم مثلثاتی ندارد . بسیار ضروری است که ما آن زاویه، که توابع آنرا ازجدول، کلکولیتر، و یا کمپیوتر دریافت میکنیم نزد خود مشخص سازیم .

مثال اول : توابع مثلثاتی آن زاویه را دریافت کنید که ضلع نهائی (Terminal side) یا (r) آن از نقاط (۴ـ۳) عبور کند؟

درشکل (۹ـ۱) این زاویه به حالت ستندارد قرار دارد. ازطریق قضیه «فیثاگورس»(۱) چنین نوشته کرده میتوانیم :

$c^2 = a^2 + b^2$ (۱)

دترازنقطه (3, 4) P میگذرد .

$r=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

$x=3 \;, y=4 \qquad r=5$

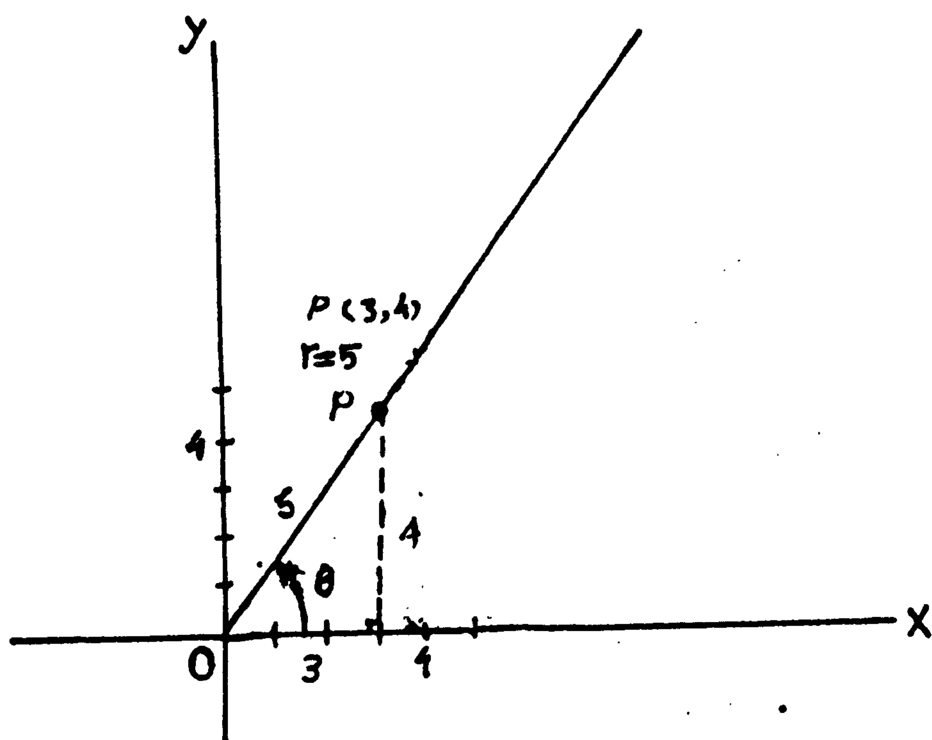
با استفاده از این قیمت ها: $r=5$ $\quad x=3, y=4$

توابع ذیل را تحریر کرده میتوانیم :

$\sin\theta=\frac{4}{5} \qquad \cos\theta=\frac{3}{5}$

$\tan\theta=\frac{4}{3} \qquad \cot\theta=\frac{3}{4}$

$\sec\theta=\frac{5}{3} \qquad \csc\theta=\frac{5}{4}$



شکل (٩-١)

مثال دوم : توابع مثلثاتی ای زاویه‌ٔکه ضلع دوم آن (r)، از نقاط (7.27,4.49) عبور کند دریافت کنید!

حل : مثلث را به کمک (7.27,4.49) رسم می نمائیم .

شکل (١٠-١)

از طریق قضیه فیتاگورثی داریم :

$r=\sqrt{7.27^2+4.49^2}=8.545$

$x=7.27\ ,\ y=4.49$

$r=8.545$

$\sin\theta=\frac{4.49}{8.545}=0.525$

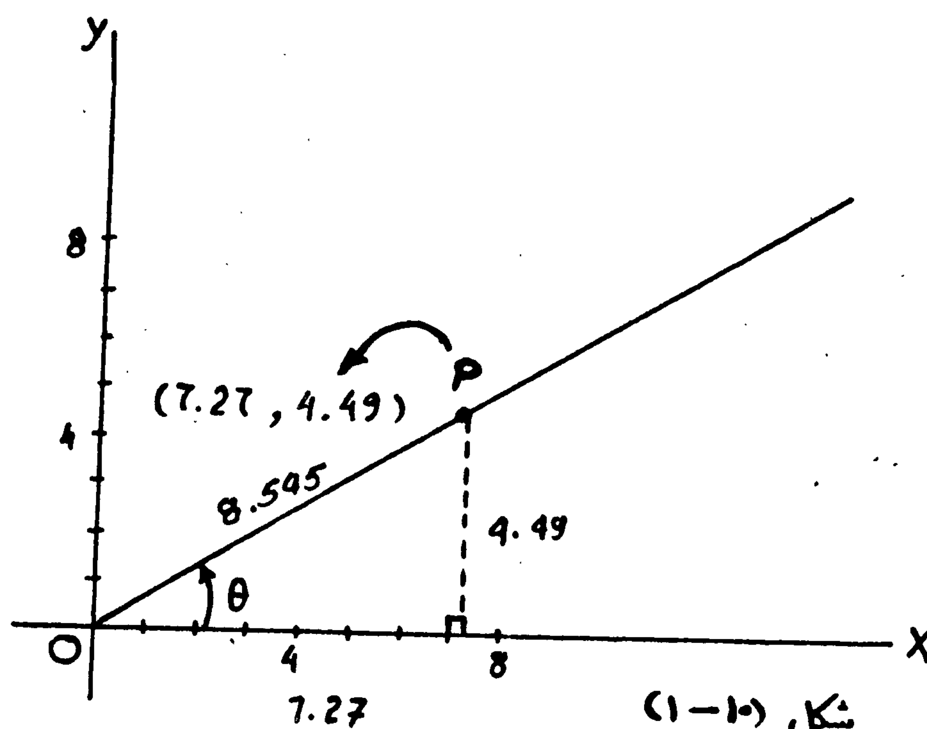
$\cos\theta=\frac{7.27}{8.545}=0.851$

$\tan\theta=\frac{4.49}{7.27}=0.618$

$\cot\theta=\frac{7.27}{4.49}=1.62$

$\sec\theta=\frac{8.545}{7.27}=1.18$

$\csc\theta=\frac{8.545}{4.49}=1.90$



شکل (۱۰-۱)

اگر یکی از توابع مثلثاتی را بدانیم . میتوانیم سایر توابع را با استفاده از قضیه «پیتاگوریون» دریافت نمائیم .

مثال سوم : هرگاه $\sin\theta=\frac{3}{7}$ و زاویهٔ θ در ربع اول واقع باشد. دراینجا چون نسبت y و r $\frac{3}{7}$ است ، میتوانیم قیمت x را باساس قضیهٔ «پیتاگوریون» چنین محاسبه میکنیم .

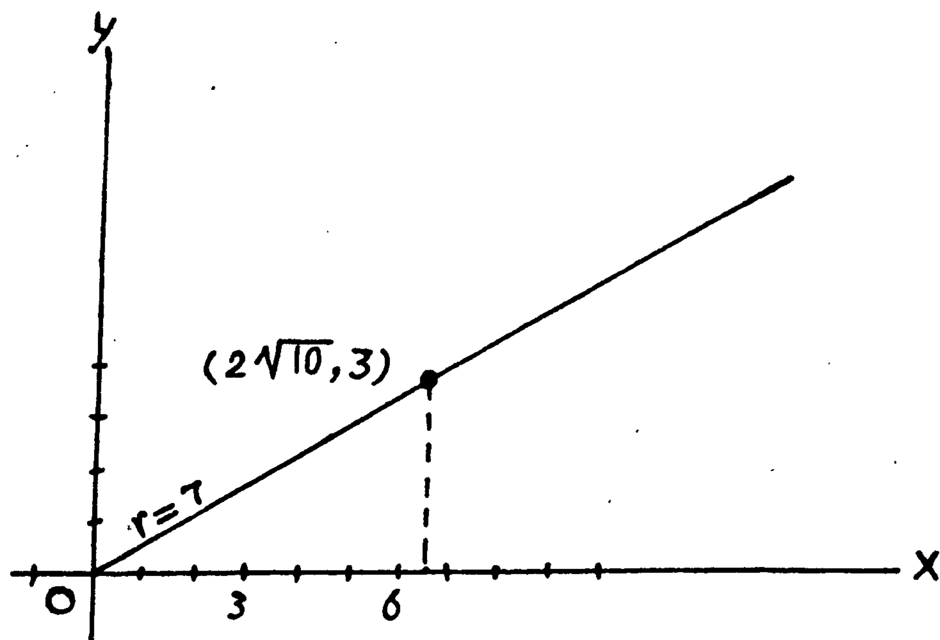
$$x=\sqrt{7^2-3^2}=\sqrt{49-9}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

لهذا وتر مثلث (r) از نقطهٔ ($2\sqrt{10}$ و 3) عبور میکند : شکل (۱۱-۱)

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}\ ;\ \tan\theta=\frac{3}{2\sqrt{10}}\ ,$$

$$\cot\theta=\frac{2\sqrt{10}}{3}\ ,\ \sec\theta=\frac{7}{2\sqrt{10}}$$

$$\csc\theta=\frac{7}{3}$$



شکل (۱۱ـ ۱)

(تمرینات ۲-۱) : درتمرینات ۱ الی ۱۲، توابع مثلثاتی ای زاویه را دریافت کنید،که ضلع دوم (r) آن از نقاط ذیل عبور کند؟

1. (6,8) 2. (5,12) 3. (15,8)
4. (24,7) 5. (9,40) 6. (16,30)
7. $(1,\sqrt{15})$ 8. $(\sqrt{3},2)$ 9. (1, 1)
10. (6,5) 11. (5, 2) 12. $(1,\frac{1}{2})$

(۲): درتمرینات ۱۳ـ الی ۱۶، توابع مثلثاتی زاویه رادریافت کنید،که ضلع دوم آن (r) از نقاط ذیل عبور کند؟

13. (3.25, 5.15) 14. (0.687, 0.943)
15. (0.08623, 0.01327) 16. (37.65, 21.87)

(۳): در تمرینات ۱۷الی ۲٤، قیمت یك تابع مثلثاتی معلوم است،توابع دیگر آنرا دریافت نمائید.

بر اساس معلومات معلوم، مجهول را دریافت کنید!

17. معلوم $\cos\theta = \frac{12}{13}$، مجهول $\sin\theta = ?$, $\cot\theta = ?$

18. 〃 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, 〃 $\cos\theta = ?$, $\csc\theta = ?$

19. 〃 $\tan\theta = 1$, 〃 $\sin\theta = ?$, $\sec\theta = ?$

20. 〃 $\sec\theta = \frac{4}{3}$, 〃 $\tan\theta = ?$, $\cos\theta = ?$

21. 〃 $\sin\theta = 0.750$, 〃 $\cot\theta = ?$, $\csc\theta = ?$

22. 〃 $\cos\theta = 0.300$, 〃 $\sin\theta = ?$, $\tan\theta = ?$

23. 〃 $\cot\theta = 0.254$, 〃 $\cos\theta = ?$, $\tan\theta = ?$

24. 〃 $\csc\theta = 1.20$, 〃 $\sec\theta = ?$, $\cot\theta = ?$

(٤): درتمرینات ۲۵ الی ۲۸ ، نقاط معینه بالای ضلع دوم زاویهء (θ) واقع اند، نشان بدهید که توابع مثلثاتی برای هرسه نقطه باهم مساوی است؟

25. $(3,4), (6,8), (4.5, 6)$; $\sin\theta$ و $\tan\theta$

26. $(5,12), (15,36), (7.5, 18)$; $\cos\theta$ و $\cot\theta$

27. $(2,1), (4,2), (8,4)$; $\tan\theta$ و $\sec\theta$

28. $(3,2), (6,4), (9,6)$; $\csc\theta$ و $\cos\theta$

(٥) سوالات متعلق به تمرینات ۲۹ الی ۳۲ را جواب بگوئید؟

(۲۹) ازتعریف توابع مثلثاتی، استنباط میشود که $\csc\theta$ معکوس $\sin\theta$ است، بگوئید کدام تابع معکوس $\cos\theta$ است؟

(۳۰) مطابق سوال (۲۹) کدام توابع معکوس $\tan\theta$ است؟

(۳۱) اگر $\cot\theta$ ضرب $\sin\theta$ شود کدام تابع دیگر بدست می آید؟

(۳۲) اگر $\sin\theta$ را بالای $\cos\theta$ تقسیم کنید، کدام تابع دیگر حاصل میشود؟

قیمت های توابع مثلثاتی :

در دروس گذشته یاد گرفتیم که هرگاه یك نقطه را بالای ضلع دوم یك زاویه (r) بدانیم . میتوانیم تمام توابع مثلثاتی ای همان زاویه را محاسبه کنیم ، درحالیکه در عمل باید زاویه را به درجه بدانیم .

یعنی ، اگر زاویه به واحد درجه معلوم شده باشد ، باید قیمت توابع آنرا دریافت کرده بتوانیم .

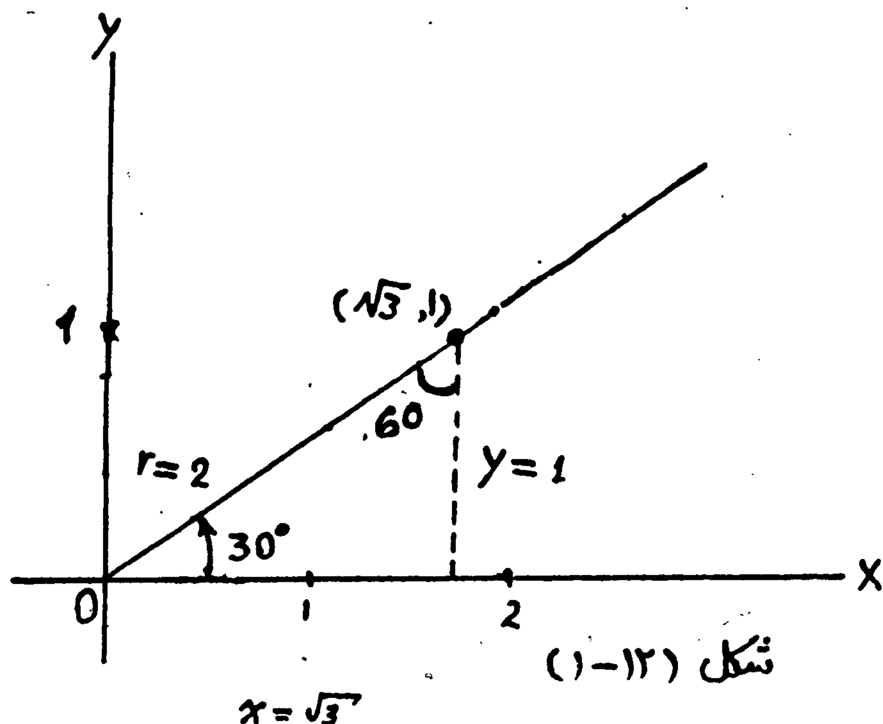
یك طریقه اینست که زاویه را توسط نقاله و خطکش (Scale) به اندازهٔ حقیقی رسم کنیم ، و بعداً مثلث قایم الزاویه که بدست می آید، طول اضلاع آنرا ذریعهٔ خطکش پیدا کنیم،و از روی طول ها اضلاع مثلث القایم الزاویه،توابع مثلثاتی ای مطلوب بدست می آید .

این مطلب در مثال های ذیل تشریح گردیده است :

مثال اول : از هندسه میدانیم که دریك مثلث قایم الزاویه 30°-60° طول ضلع مقابل زاویهٔ 30° مساوی به نصف وتر آنست، پس اگر ضلع مقابل این زاویه را (۱) انتخاب نمایم وتر آن (۲) میشود ، نظریه قضیهٔ پیتاگورس ضلع x مساوی می گردد به: $\sqrt{3}$

($x = \sqrt{3}$) شکل(۱۲-۱) لهذا: ($\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

به همین ترتیب ، تمام توابع مثلثاتی ای زاویهٔ 60° را پیدا کرده میتوانیم مانند:



شکل (۱۲-۱)

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

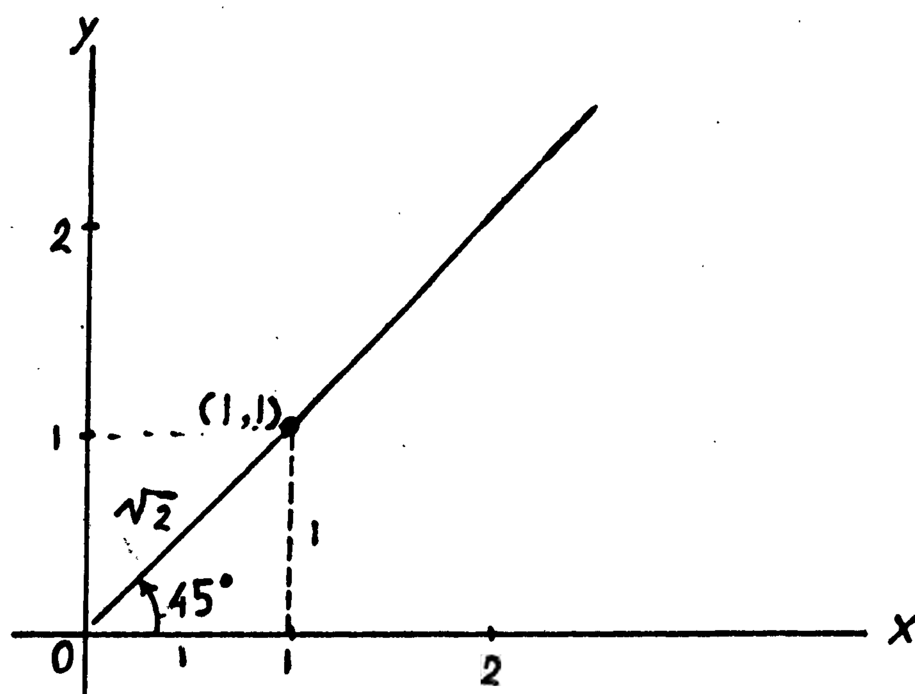
and $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

مثال دوم : توابع مثلثاتی زاویه 45° رادریافت کنید.

از هندسه میدانیم ، دریك مثلث قایم الزاویه اگر یك زاویه 45° درجه باشد، زاویهٔ دیگری نیز 45° میباشد، همچنان این مثلث یك مثلث متساولساقین است، یعنی دوضلع آن باهم مساوی میباشد.

اگر دوضلع مساوی هرکدام ۱ـ1 باشد، پس وتر آن ($\sqrt{2}$) میشود، شکل (۱۳ـ۱).

لهذا : توابع مثلثاتی ای زاویهٔ 45° چنین معلوم میشود.



شکل (۱۳-۱)

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

تمام توابع مثلثاتی ای زاویه های 30° ، 45° ، 60° ، بطور خلاصه درجدول ذیل درج گردیده است .

یا

قیمت تقریبی به کسر اعشاری:

	0° 30°	45°	60°	30°	45°	60°	
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,500	0.707	0.866	قیمت اعشاری
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0.866	0.707	0.500	
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0.577	1,000	1.732	

(۱)

پیشگفتار

این کتاب بحیث یك بخش مختص مثلثات برای تدریس شاگردان تخنیکی، و شاگردان قبل از انجنیری ترتیب یافته است .

در تهیه و ترتیب کتاب سعی بعمل آمده،که مثلثات بحیث یك بخش بسیار مهم علم ریاضی برای خواننده معرفی شود. موضوعات اساسی مثلثات،مندرجات این کتاب را تشکیل میدهد.

تسلسل عناوین،و موضوعات کتاب طوری ترتیب شده،که خواننده میتواند- مباحث مثلثات را حتی بدون معلومات قبلی تعقیب نماید. زیرا معلومات کتاب نسبتاً ابتدائی است که میتوان آنرا کتاب اول،علم مثلثات برای چنین کورس ها نام گذاشت .

محتوای کتاب را میتوان در مدت یك سمستر درسی تدریس نمود. در خلال هرموضوع تمرینات کافی داده شده،که برای شاگردان کورس ریاضی کافی میباشد. برعلاوهٔ ، تمرینات ، پرابلم ها، سوالات عبارتی نیز گنجانیده شده تا شاگردان را در کارهای مهارتی و ابتکاری کمك کند. در کتاب،مفاهیم عمومی مثلثات به السنه ملی کشور عزیز ما افغانستان تشریح گردیده،که این شیوهٔ خاص ، مطالعهٔ آنرا سهلتر میسازد. از آنجاکه مثلثات جزء نصاب تعلیمی کورس های تخنیکی و انجنیری میباشد، بیشتر کوشش بعمل آمده،که پرابلم های عملی شامل تمرینات گردد. کتاب موضوعات عمومی مثلثات را برای خواننده به شیوهٔ خاص ارائه میدارد.

درتهیه و ترتیب کتاب، از مأخذ معتبر و مشهور معاصر چاپ سال های (۱۹۹۰_۱۹۸۰) استفاده شده،و باینصورت استعمال کلکولیتر- درتمرین های این کتاب نیز شامل میباشد. توقع مؤلف اینست که،خوانندهٔ محترم با مطالعهٔ این کتاب معلومات و مهارت های لازم را در مثلثات فرا گیرد و بتواند که مثلثات را در کسب سایر رشته های علم و دانش و مهارت های تخنیکی به حیث وسیلهٔ موثر بکار ببرند.

دراخیر کتاب بعضی ضمیمه های مفید علاوه شده که شاگردان تخنیکی را بیشتر

قیمت توابع مثلثاتی به کمک هندسه به شکل ترسیم دریافت شده میتواند ، اما آنقدر دقیق نخواهد بود . قیمت های دقیق تر با استفاده از کلکولس (Calculus) و ریاضیات عالی محاسبه میشود.

به خاطر باید داشت که در تیکنالوژی مدرن تمام توابع مثلثاتی در کلکولیترهای ساینسی گنجانیده شده،و توسط استعمال کلکولیتر شما میتوانید توابع مثلثاتی ای تمام زاویه ها را دریافت کنید. همچنان در کلکولیتر میتوانید زاویه های که به سیستم اعشاری مشخص باشند توابع آنها راسا دریافت کنید ، اما در جدول مثلثاتی و کتابهای ریاضی و مثلثات،زاویه ها به درجه ، دقیقه وثانیه نشان داده شده است که توابع مثلثاتی زاویهء اعشاریه دار را نمیتوانید مستقیما ازجدول ها بدست بیاورید.

وقتیکه توسط کلکولیتر توابع مثلثاتی یك زاویه را دریافت میکنید ، چنین عمل را باید انجام بدهید.

برای آنکه $\sin\theta$ ، $\tan\theta$ ، $\cos\theta$ را دریافت کنیم .

زاویه را در کلکولیتر راجستر میکنیم وبعداً باالترتیب دکمه (TAN), (COS), (sin) فشار میدهیم . در کلکین چهء کلکولیتر قیمت توابع مطلوب ظاهر میشود.

مثال: توسط کلکولیتر $\sin 37^\circ$ را دریافت کنید ؟

نخست عدد ۳۷ را درکلکولیتر راجستر نمائید بعداً دکمه (SIN) را فشار بدهید $\sin 37^\circ = 0.601850$ در کلکین چهء کلکولیتر ظاهر میگردد.

قبل ازایجاد و استعمال کلکولیتر، قیمت توابع مثلثاتی از طریق جدولهای مثلثات گرفته می شد. مادرینجا طرز استعمال جداول مثلثاتی را مورد بحث قرار میدهیم .

یک **واحد اندازه گیری زاویه** : ، درجه (degree) است ، که اجزای این واحد: دقیقه و ثانیه میباشند. در[۲] جدول-(۳) (اخیر این کتاب) توابع مثلثاتی از زاویه 0° تا 90° گنجانیده شده، به ترتیبکه زوایا از 0° درجه تابه 45° بطرف چپ جدول درج شده،و توابع مثلثاتی از بالا به پائین خوانده میشود ، درحالیکه زاویه ها از 45° تابه 90° به طرف راست جدول درج گردیده وقیمت های توابع مثلثاتی آنها از پائین به بالا خوانده میشود.

(۲) ضمیمه اول : کتاب (121 ← 119) ص

مثال اول: $\tan 42^\circ 20'$ و $\sin 64^\circ 40'$ را از جدول دریافت کنید $\tan 42^\circ 20'$ بطرف چپ جدول است.

$\tan 42^\circ 20' = 0.9110$

و $\sin 64^\circ 40'$ بطرف راست جدول واقع است.

$\sin 64^\circ 40' = 0.9038$

مثال دوم : اگر: $\tan\theta = 2.378$ باشد، زاویهء θ را دریافت کنید. ما در ستون (tan) جستجو مینمائیم تا عدد 2.378 یا نزدیك آنرا دریافت کنیم. و بعداً می بینیم که این قیمت در مقابل کدام زاویه موقعیت دارد. به هر زاویهٔ که تطابق نمود همان زاویه مطلوب است.

که در این مثال : $\theta = 67^\circ 10'$ است.

(تمرین ۳-۱) :

۱ – با استفاده از نقاله زاویه های ذیل را رسم کنید، وبعداً از ضلع دوم زاویه یا وتر مثلث ده واحد (10cm) جدا کنید. سپس تمام توابع مثلثاتی ای زاویه های موصوف را دریافت کنید.

1. 40° 2. 75° 3. 15° 4. 53°

از (جدول مثلثات ضمیمهء کتاب است.) استفاده کنید.

۲ – از تمرین ۵ الی ۱٦ توابع مثلثاتی زاویه های ارائه شده را توسط کلکولیتر دریافت کنید؟

5. $\sin 22.4^\circ$ 6. $\cos 72.5^\circ$ 7. $\tan 57.6^\circ$ 8. $\sin 36.0^\circ$
9. $\cos 15.71^\circ$ 10. $\tan 8.653^\circ$ 11. $\sin 83.792^\circ$ 12. $\cos 46.725^\circ$
13. $\cot 67.78^\circ$ 14. $\csc 22.81^\circ$ 15. $\sec 50.4^\circ$ 16. $\cot 41.8^\circ$

۳ – از تمرین ۷ الی ۲۸ زاویه رابرای هرقیمت معینه توسط کلکولیتر دریافت کنید؟

17. $\cos\theta = 0.3261$ 18. $\tan\theta = 2.470$
19. $\sin\theta = 0.9114$ 20. $\cos\theta = 0.0427$
21. $\tan\theta = 0.20741$ 22. $\sin\theta = 0.10946$
23. $\cos\theta = 0.65007$ 24. $\tan\theta = 5.7706$
25. $\csc\theta = 1.245$ 26. $\sec\theta = 2.045$
27. $\cot\theta = 0.14434$ 28. $\csc\theta = 1.0125$

۴- از تمرین ۲۹ الی ۳۲، توابع مثلثاتی ای زاویه های ارائه شده را از جدول (۲) دریافت کنید!

29. $\sin 19^\circ 0'$ 30. $\cos 43^\circ 0'$
31. $\tan 67^\circ 20'$ 32. $\cot 76^\circ 50'$

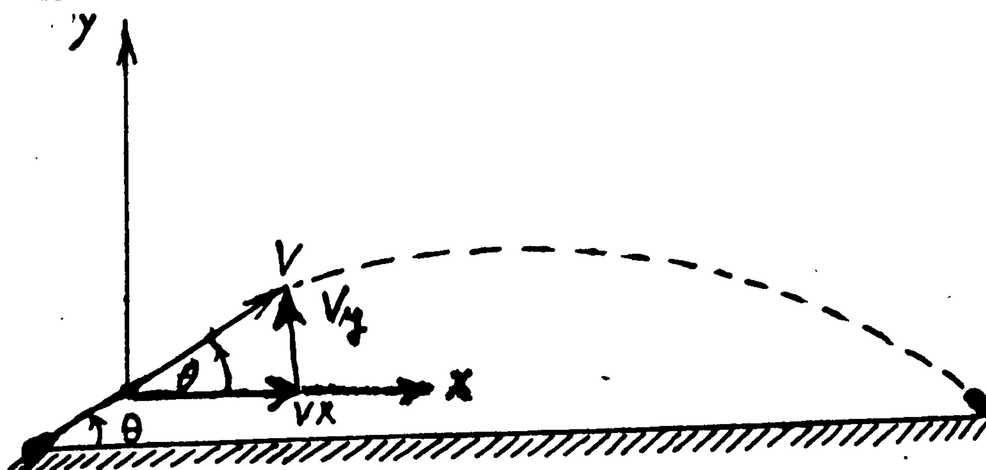
۵ – از تمرین ۳۳ الی ۳۶، بااستفاده از جدول (۳) زاویه θ را دریافت نمائید!

33. $\tan\theta = 0.8441$ 34. $\sin\theta = 0.9175$
35. $\cos\theta = 0.1260$ 36. $\tan\theta = 1.523$

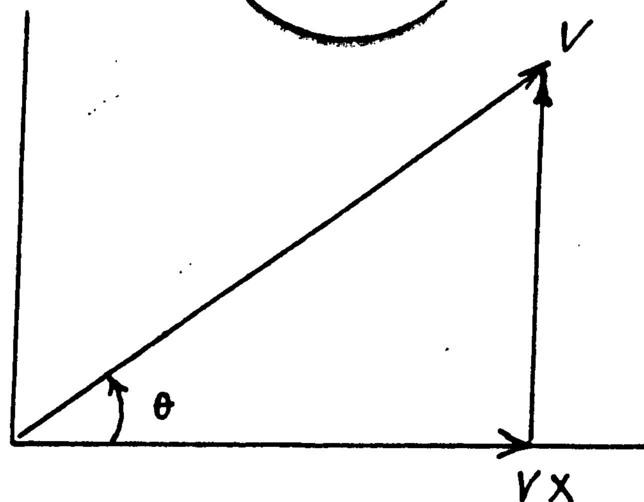
۶ – از تمرین ۳۷ الی ۴۰، با اجراء عملیه انترپولیشن (interpolation) توابع مثلثاتی را دریافت کنید، و از تمرین ۴۱ الی ٤٤ با استفاده از عملیه انترپولیشن (Interpolation) زاویه های مطلوب را دریافت کنید!

37. $\tan 28^\circ 56'$ 38. $\cos 48^\circ 44'$ 39. $\sin 61^\circ 15'$ 40. $\tan 53^\circ 12'$

41. $\cos\theta = 0.2960$ 42. $\tan\theta = 0.1086$
43. $\sin\theta = 0.5755$ 44. $\cot\theta = 0.8070$



۷– مرمی که از زمین به هوافیر میشود، شکل (مقابل) سرعت افقی ای آن با معادله ذیل محاسبه میشود.



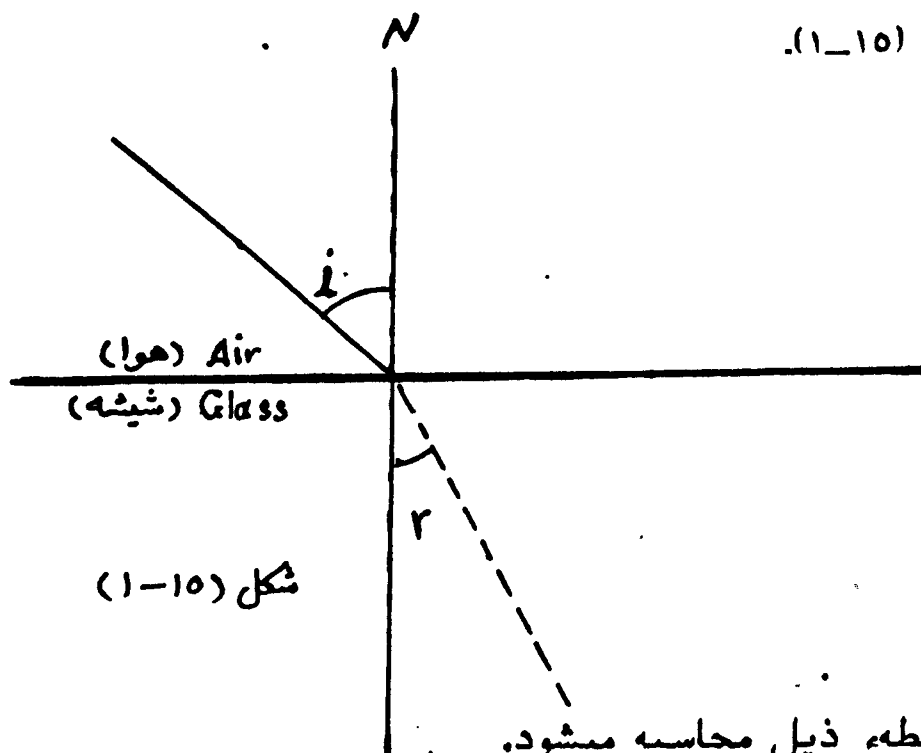
$$V_x = V(\cos\theta)$$

شکل (۱۴-۱)

مثال ــ سرعت افقی‌یک مرمی را دریافت کنید-که سرعت آن 22 ft / sec بوده و به زاویه، $\hat{\theta} = 36^\circ$ فایر شده باشد.

$$V_x = V\cos\theta = 22(\cos 36^\circ)$$
$$= 22(.8090) = 17.798 \ ft/sec.$$

۸ ــ : وقتیکه شعاع نور از هوا به روی یك شیشه می تابد، نور از شیشه عبورمیکند و اندکی طرف خط عمود که بالای نقطهء تابش رسم شده مایل میشود، یا به عبارهء دیگر نور در شیشه انکسار میکند شکل (۱۵ــ۱).



شکل (۱۵-۱)

اندکس (Index) انکسار نور از رابطهء ذیل محاسبه میشود.

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

در صورتیکه $r = 34.5^\circ$ $i = 59.0^\circ$ باشد، شما اندکس انکسار نور را دریافت کنید؟

مثلث قایم الزاویه :

از هندسه میدانیم که ، هر مثلث دارای سه ضلع وسه زاویه میباشد. که به این اساس مثلث جمعاً شش جز دارد. هرگاه ضلع ودو جز دیگر یك مثلث را بدانیم ، درآنصورت ما میتوانیم که سه جز دیگری آنرا معلوم نمائیم . در صورتیکه در جمله سه جز معلوم ، یکی آن ضلع باشد . یعنی یك ضلع و دو زاویهء مثلث را بدانیم، زاویهء سوم آنرا باساس این که مجموع زاویه های داخلی ای یك مثلث °١٨٠ درجه است دریافت کرده میتوانیم .

مفهوم حل مثلث :

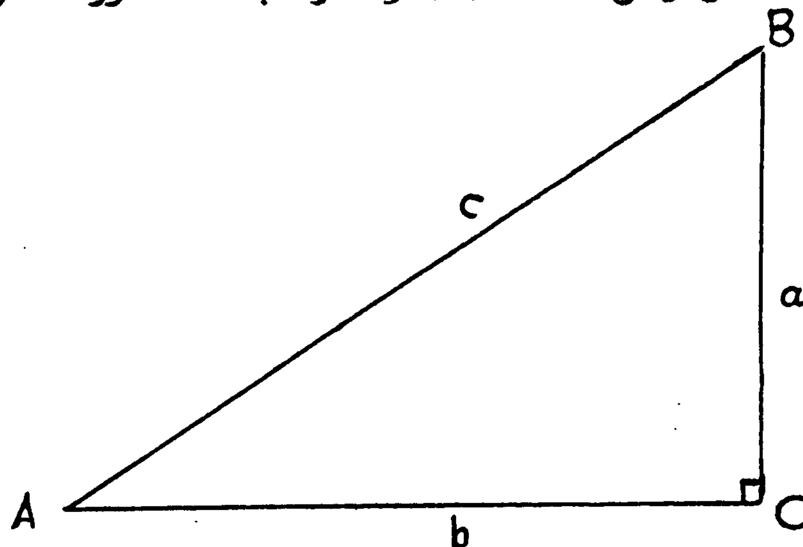
وقتیکه میگویم مثلث را حل کنید. به این مفهوم است که اگر دو زاویه و یك ضلع یك مثلث معلوم باشد -- دیگر اجزاء آنرا دریافت میکنیم ، میگویم مثلث را حل مینمائیم .

درین بخش میخواهیم مثلث قایم الزاویه را که یك زاویهء آن (°٩٠)میباشد مورد بحث قراربدهیم. هرگاه در مثلث قایم الزاویه یك زاویه و یك جز دیگر را داشته باشیم،میتوانیم مثلث را حل نمائیم . میدانیم که مجموع زاویه های داخلی یك مثلث(°١٨٠) درجه میباشد. وقتیکه یك زاویهء آن(°٩٠)درجه باشد مجموع دو زاویه دیگر نیز(°٩٠) میشود.

دو زاویهء حاده که مجموع آنها(°٩٠)درجه باشد،آنهارا زاویهء متممه (Complementry) می گویند.

معمولاً رأس های مثلث قایم الزاویه را با حروف بزرگ C,B,A،و ضلع های آن را در مقابل هر رأس باالترتیب با حروف کوچك c,b,a نشان میدهند، دراینجا ضلع (C) وتر (hypotenuse) مثلث میباشد. شکل (١٦-١).اگر رأس مثلث (A) را در مبداء محور x، وy قرار بدهیم شکل (١٧-١).

توابع مثلثاتی ای زاویهء A را چنین نوشته کرده میتوانیم .

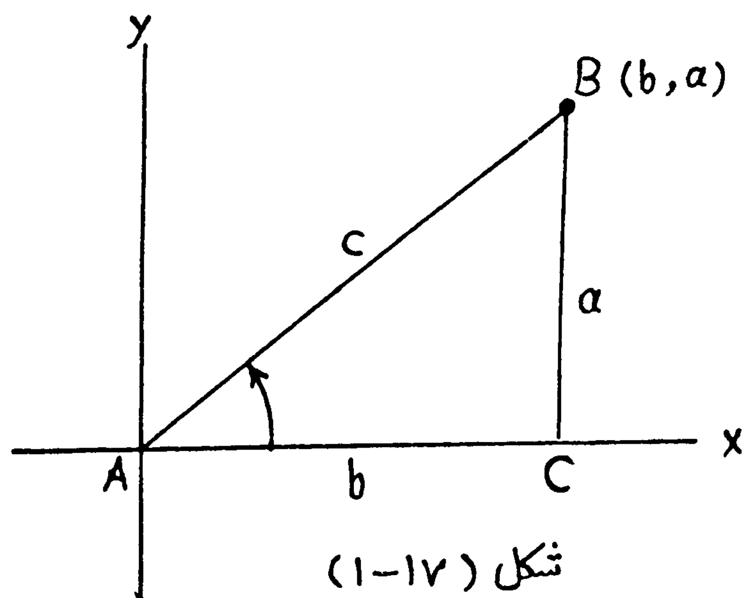


شکل (١٧-١)

$\sin A = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\cot A = \frac{b}{a}$

$\cos A = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\sec A = \frac{c}{b}$

$\tan A = \frac{a}{b}$ $\qquad$ $\csc A = \frac{c}{a}$



شکل (۱۷-۱)

حال اگر مثلث مذکور را بالای محور x، و y طوری موقعیت بدهیم که راس (B) در مبداء واقع شود، شش توابع مثلثاتی زاویهٔ B را میتوانیم چنین نوشته کنیم شکل (۱۸-۱) :

$$\sin B = \frac{b}{c}$$

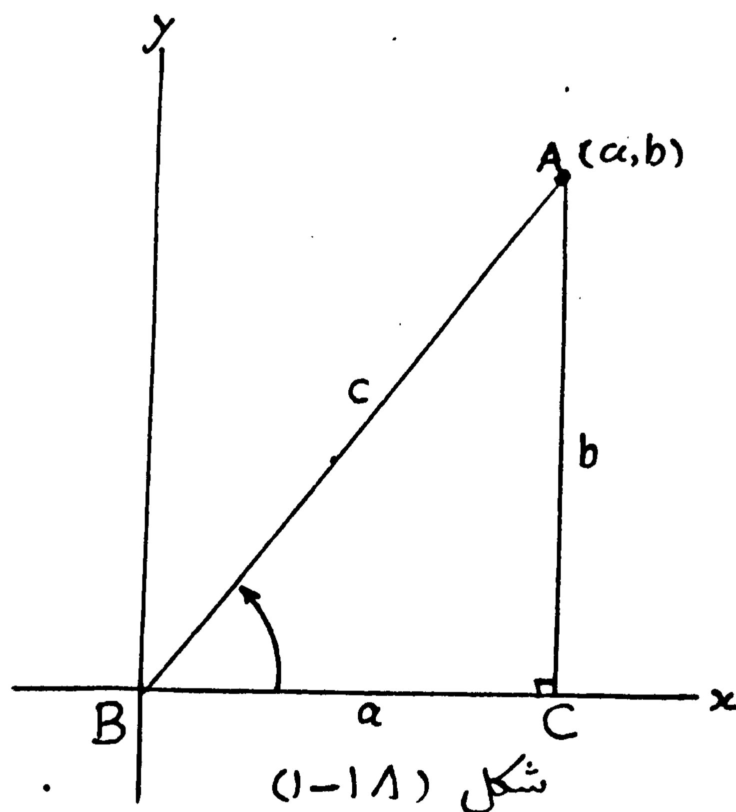
$$\tan B = \frac{b}{a}$$

$$\sec B = \frac{c}{a}$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cot B = \frac{a}{b}$$

$$\csc B = \frac{c}{b}$$



شکل (۱۸-۱)

الحال، تعریفات خود را مختصر ساخته، توابع مثلثاتی را از برای یك زاویهٔ حاده کیفی (α) دریك مثلث قایم الزاویه شکل عمومی میدهیم :

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل زاویهٔ } \alpha}{\text{وتر زاویه } \alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$$

از تعریفات فوق روابط ذیل را نیز بدست آورده میتوانیم :

$$\sin A = \cos B \,,\ \tan A = \cot B$$

$$\sec A = \csc B$$

به عبارهٔ دیگر: در زاویای متممه $\sin\theta$ یکی مساوی $\cos\theta$ دیگر و $\tan\theta$ یکی مساوی $\cot\theta$ دیگر، همچنان $\sec\theta$ یکی مساوی $\csc\theta$ دیگری میشوند.

مطلب فوق را چنین خلاصه می نمائیم .

فورمول :

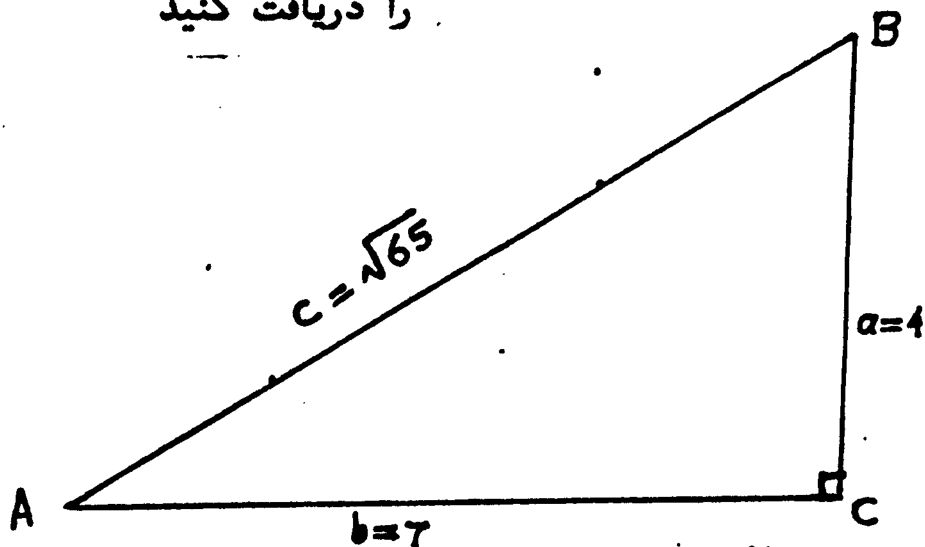
$$\sin A = \cos(90^\circ - A) \,,\quad \tan A = \cot(90^\circ - A)$$

$$\sec A = \csc(90^\circ - A)$$

معلوم $a = 4$, $b = 7$, و $c = \sqrt{56}$ $(\hat{C} = 90^\circ)$

مجهول $\sin A$ ، $\cos A$ ، و $\tan A$ را دریافت کنید

شکل (۱۹-۱) را مطالعه نمائید.



شکل (۱۹-۱)

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویهٔ } A}{\text{وتر}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = 0.496$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور زاویهٔ } A}{\text{وتر}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = 0.868$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل زاویهٔ } A}{\text{ضلع مجاور زاویهٔ } A} = \frac{4}{7} = 0.571$$

مثال : در شکل (۱۹-۱) ما داریم :

$$\sin B = \frac{\text{ضلع مقابل } B}{\text{وتر}} = \frac{7}{\sqrt{65}} = 0.868$$

$$\cos B = \frac{\text{ضلع مجاور } B}{\text{وتر}} = \frac{4}{\sqrt{65}} = 0.496$$

$$\tan B = \frac{\text{ضلع مقابل } B}{\text{ضلع مجاور } B} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$\therefore \sin A = \cos B \;,\; \cos A = \sin B$$

با فرا گرفتن موضوعات مثلثات تا این سرحد، اکنون ما قادر هستیم که مثلث قایم الزاویه را حل نمائیم .

مثال اول :

مثلث قایم الزاویه را حل کنید :

$A = 50.0^\circ \qquad b = 6.70,$

در شکل (۲۰-۱)

$\frac{a}{b} = \tan A \longrightarrow a = b \tan A$

$a = 6.70(\tan 50.0^\circ) = 7.98$

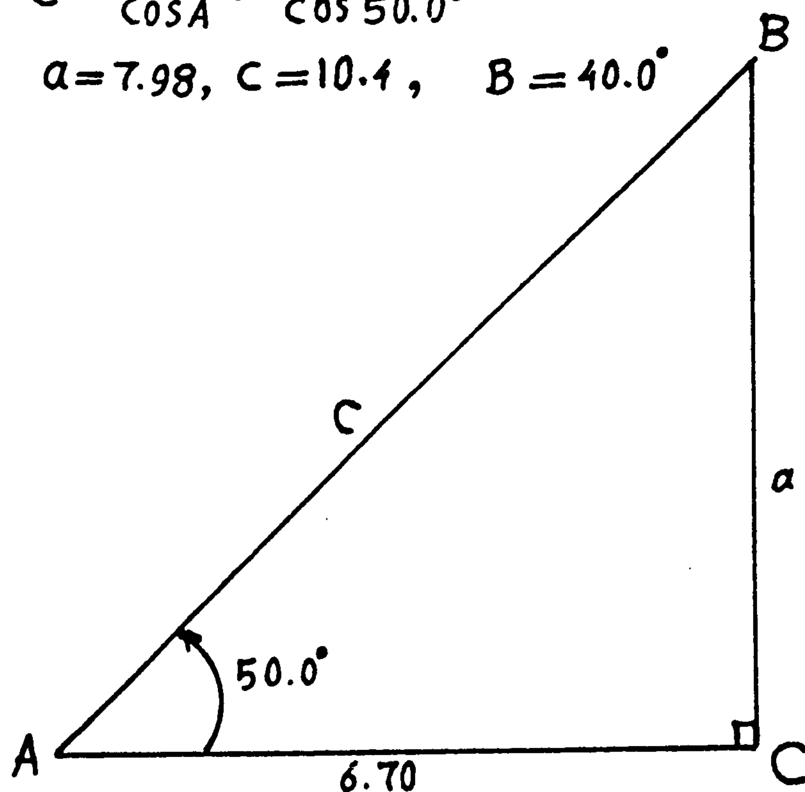
6.7 [X] 50 [TAN] [=] در کالکولیتر حل کنید.

$A = 50.0^\circ$

$B = 90.0^\circ - 50.0^\circ = 40.0^\circ \quad \frac{b}{c} = \cos A,$

$C = \frac{b}{\cos A} = \frac{6.70}{\cos 50.0^\circ} = 10.4$

$a = 7.98, \quad C = 10.4, \quad B = 40.0^\circ$



شکل (۲۰-۱)

مثال دوم : ضلع b و c معلوم است مثلث قایم الزاویه شکل (۲۱-۱) را حل کنید؟

$b = 56.82$, و $C = 79.55$. شکل (۲۱-۱)

چون، $\cos A = \frac{b}{c}$

ما داریم ! $\cos A = \frac{56.82}{79.55} = 0.7143$

توسط کالکولیتر ← $A = 44.42^\circ$ (عدد 7143. را در کالکولیتر ثبت کنید بعداً تکمه cos را فشار دهید.)

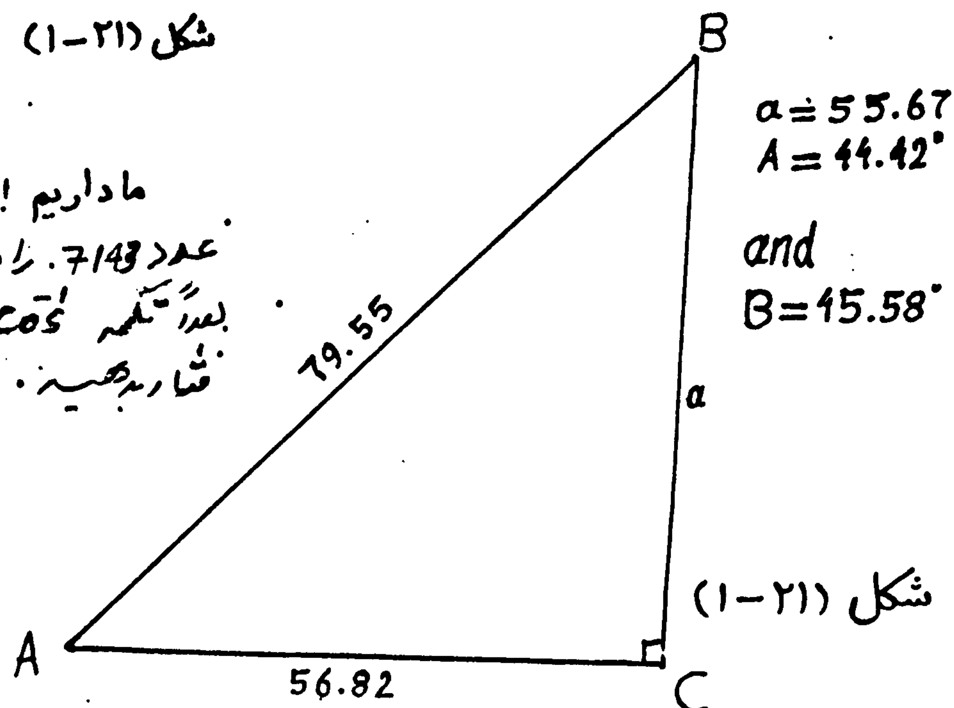
چون ← $A + B = 90^\circ$

$\therefore \; B = 90.00^\circ - 44.42^\circ = 45.58^\circ$

$a^2 + b^2 + c^2 \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{79.55^2 - 56.82^2}$

$= 55.67$



شکل (۲۱-۱)

تمرین : (۴-۱)

از تمرین ۱ الی ۴، شکل مناسبی رسم کنید که نشان بدهد: صرف یك مثلث دارای اوصاف متذکره میباشد، و اگر کدام مثلث دیگر تشکیل شود آن هم مساوی و مشابه (Cogruent) congruent مثلث اولی خواهد بود.

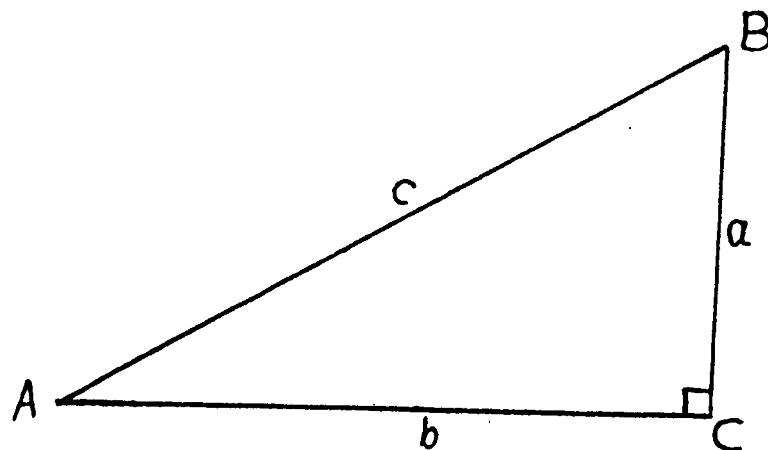
۱_ مثلثیکه اضلاع آن ″۳ و ″۶ باشد، و زاویه بین آنها °۳۰ .

۲_ مثلثیکه ضلع ″۴ مشترك بین دو زاویه °۴۰ و °۷۰ داشته باشد.

۳_ مثلث قایم الزاویه که وتر آن 5cm ویك ضلع آن 3cm باشند .

۴_ یك مثلث قایم الزاویه که زاویه بین وتر و ضلع 5 cm آن، °70 درجه باشد.

از تمرین ۵ الی ۲۴، مثلث قایم الزاویه با شرائط ذیل حل نمائید . شکل (۲۲-۱)



شکل (۲۲-۱)

5. $A = 77.8^\circ$، $a = 6700$
6. $A = 18.4^\circ$, $c = 8.97$
7. $a = 150$، $c = 345$
8. $a = 93.2$, $c = 124$
9. $B = 32.1^\circ$، $c = 23.8$
10. $B = 64.3^\circ$, $b = 0.652$
11. $b = 82.1$، $c = 88.6$
12. $a = 5920$, $b = 4110$
13. $A = 32.10^\circ$، $c = 56.85$
14. $B = 12.60^\circ$, $c = 18.42$
15. $a = 56.73$، $b = 44.09$
16. $a = 9.908$, $c = 12.63$
17. $B = 37.5^\circ$، $a = 0.862$
18. $A = 52.6^\circ$, $b = 8.03$
19. $B = 74.18^\circ$، $b = 1.849$
20. $A = 51.36^\circ$, $a = 360.2$
21. $a = 591.87$، $b = 264.93$
22. $b = 2.9570$, $c = 5.0864$
23. $A = 12.975^\circ$، $b = 14.592$
24. $B = 84.942^\circ$, $a = 7413.5$

مجهز میسازد تا در اندازه گیری ها، و کارهای مهارتی ازان استفاده نمایند. جواب تمام سوالات با پرابلم های کتاب دریک جلد جداگانه بنام «حل تمرینات مثلثات» تهیه گردیده، که شاگردان میتواند آنرا بحیث کتاب ـ تمرین (work-book) نیز مورد استفاده قرار بدهند.

میزان ۱۳٦۹ انجنیر نظرمحمد «کاریار»

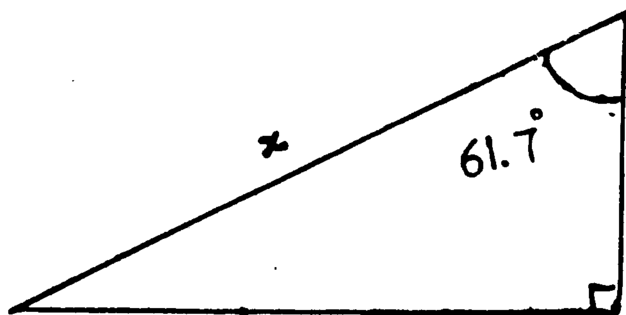
از تمرین ۲۵ الی ۲۸، اجزاء مثلث را دریافت کنید، که با علامات X و A نشان داده شده باشد؟ شکل (۲۳-۱)

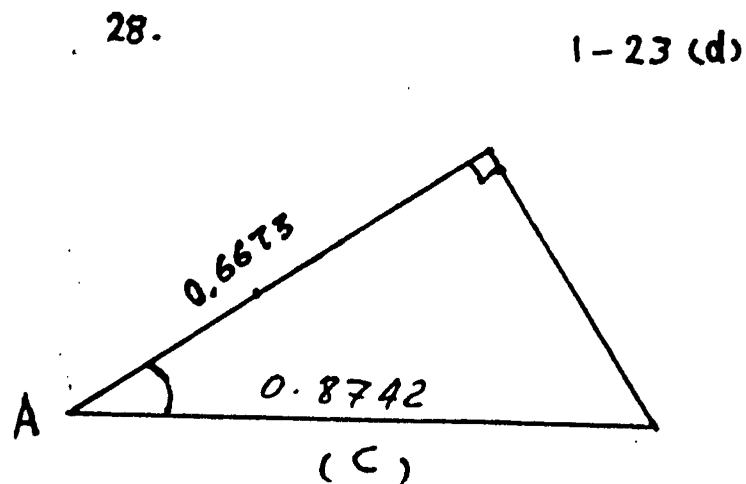
25. شکل – 1-23(a) در مثلث (۲۳a-۱)

26. شکل – 1-23(b) در مثلث (۲۳b-۱)

27. شکل – 1-23(c) در مثلث (۲۳c-۱)

28. 1-23(d) در مثلث (۲۳d-۱)



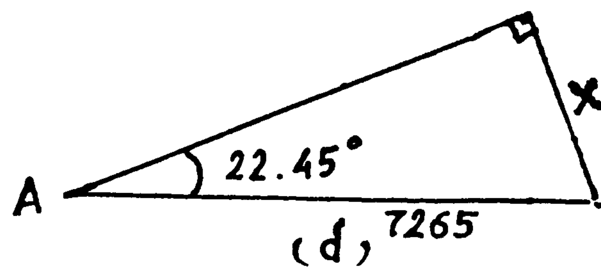


A

36.3

19.7

(b)



شکل (۲۳-۱)

از تمرین ۲۹ الی ۳۲، مثلث قایم الزاویه را با اوصاف ذیل حل نمائید. ؟

29. $B = 37°40'$, $a = 0.886$ 30. $A = 70°10'$, $a = 137$

31. $b = 86.7$, $c = 167$ 32. $a = 6.85$, $b = 2.12$

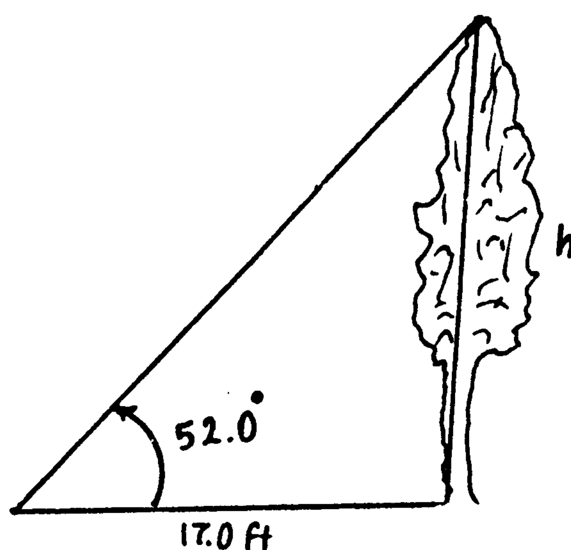
سوالات مربوط به کاربرد مثلثات

تطبیق مثلث قایم الزاویه :

بسیاری از سوالات فزیک ، میخانیک با استفاده از حل مثلث قایم الزاویه حل میشوند.

مثال های ذیل جنبه های تطبیقی مثلثات را برجسته می سازد:

مثال الف : طول سایهء یک درخت (۱۷′) و زاویهء ایلویشن درخت (angle of elevation) درانجام سایه °52 درجه است ، بلندی درخت را دریافت کنید؟ شکل (۲٤_۱)



شکل(۲۴-۱)

(angle of elevation)

$\frac{h}{17.0} = \tan 52.0^\circ$

یا $h = 17.0(\tan 52.0^\circ) = 21.8\,ft$

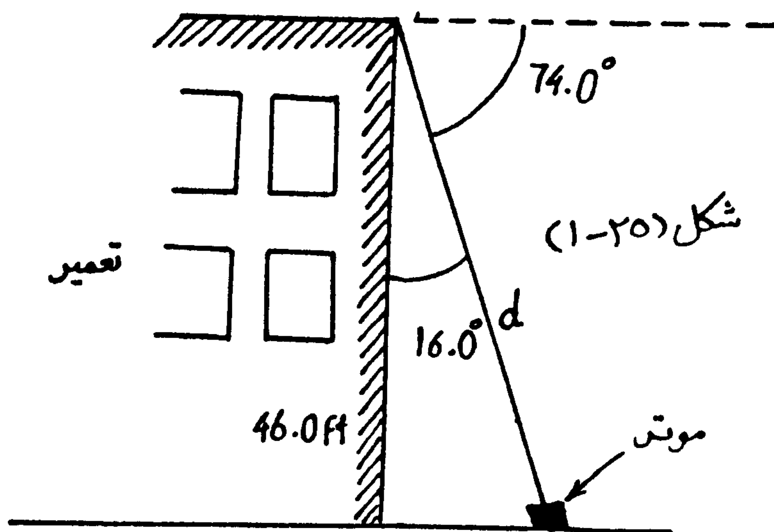
$\therefore$ (ارتفاع درخت) $h = 21.8\,ft$

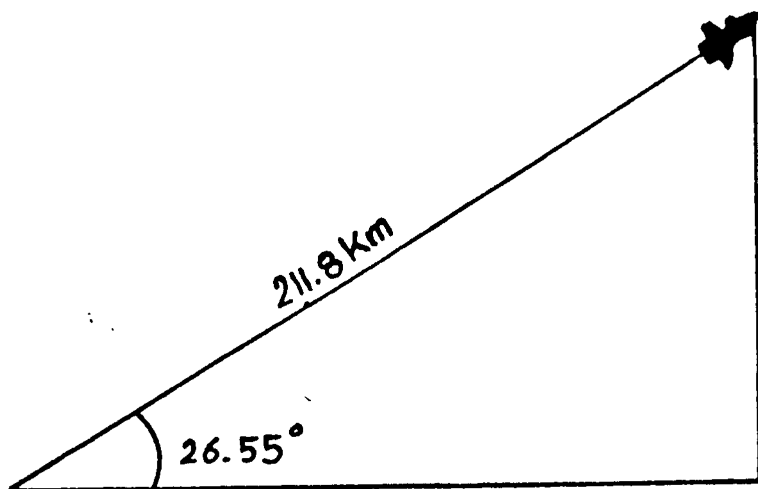
مثال ب : از بام یک تعمیر که ارتفاع آن (۴۲′) است زاویهء دیپریشن (angle of depression) یک موتر که در سرک موقعیت دارد، °۷٤ درجه است ، معلوم کنید که موتر از سر بام چقدر دور است شکل (۲۵_۱)

$$\frac{46.0}{d} = \cos 16.0^\circ$$

$$d = \frac{46.0}{\cos 16.0^\circ}$$

$$d = 47.9\,ft$$





$$(6355\,km/h)\left(\frac{1}{30.00}h\right)=211.8\,km$$

$$\frac{h}{211.8}=\sin 62.55°$$

$$h=211.8(\sin 26.55°)$$

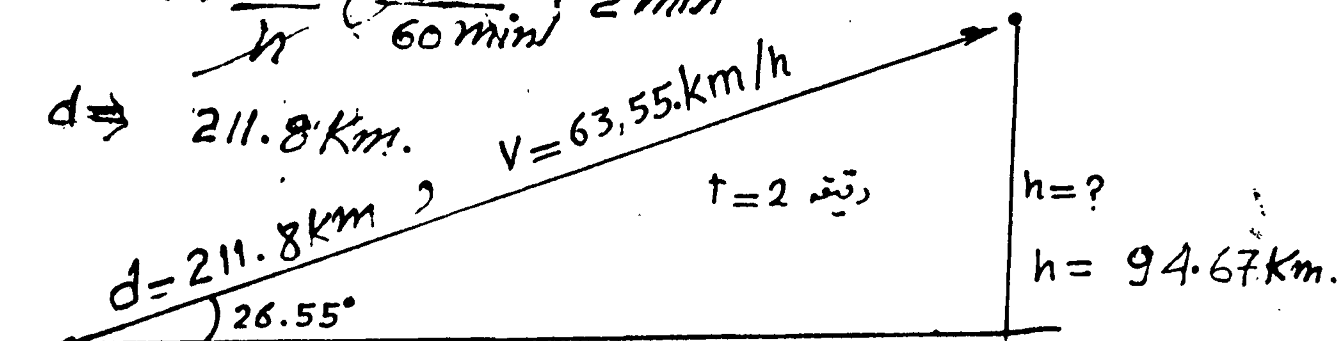
$$=94.67\,km$$

شکل (۲۶-۱)

مثال ج : یك میزایل از سطح زمین به زاویهء ۲۶/۵۵° فایر گردیده است . اگر این میزایل برای مدت دو دقیقه بالای خط مستقیم به سرعت اوسط 6355km/h حرکت کند ارتفاع میزایل بعد از دو دقیقه چقدر خواهد بود؟ شکل (۲۷-۱) و (۲۷-۱) .

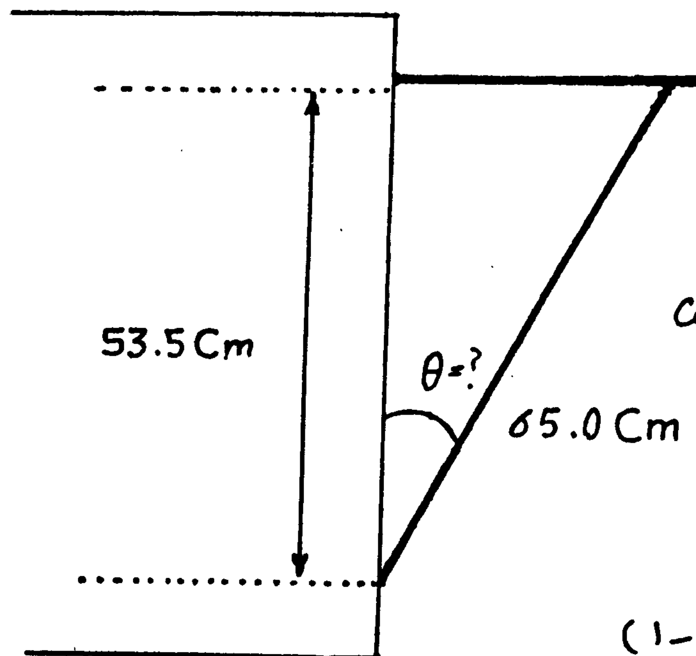
$$d=VT=6355\,\frac{km}{h}\left(\frac{h}{60\,min}\right)2\,min$$

$$d \Rightarrow 211.8\,Km.$$



شکل (۲۷-۱)

مثال (ج) ــ یك تکیه گاه ــ شیلف ، توسط یك چوب که طول آن 65cm سانتی است،به فاصلهٔ 53.5cm پائینتر میخ شده است . زاویه بین چوب و دیوار را پیدا کنید؟ شکل (۲۸ــ۱)



شکل (۲۸ــ۱)

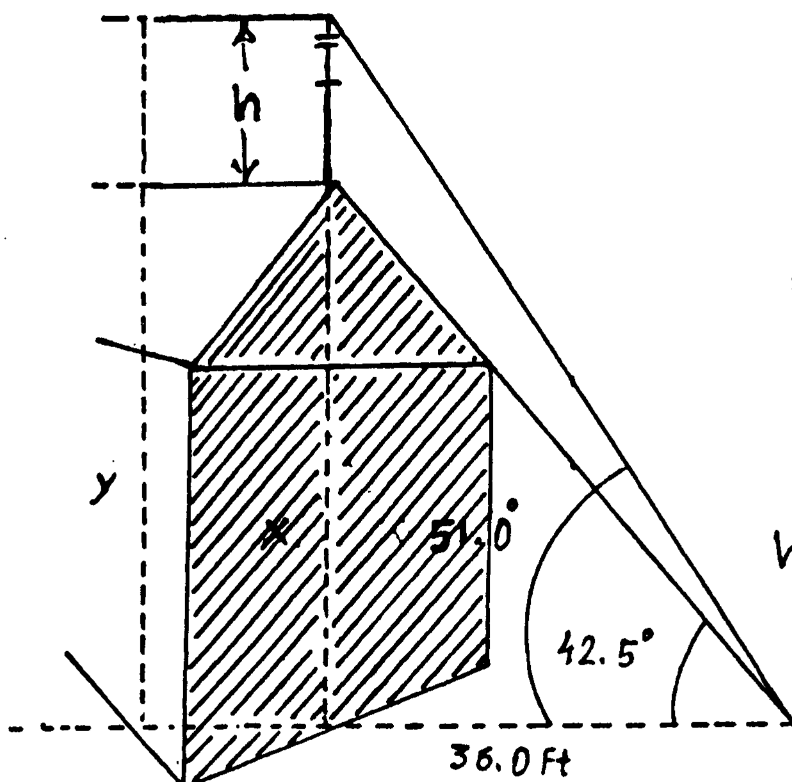
$$\cos\theta = \frac{53.5}{65.0} = .8231$$

توسط کالکولیتر: عدد 8231. را ثبت نمائید بعداً کلمه ارک Cos را فشار بدهید.

یا $\theta = 34.6^\circ$

مثال د :

آنتن یك تیلویزیون بالای یك بام موقعیت دارد. به فاصلهٔ ۳۶ دورتر از تعمیر زاویهٔ ایلویشن بالا و پائین آنتن °51 و °45.5 درجه میباشند . ارتفاع آنتن را دریافت کنید؟ شکل (۲۹ــ۱)



$$\frac{x}{36.0} = \tan 42.5^\circ$$

$$x = 36.0(\tan 42.5^\circ)$$

$$= 33.0 \text{ ft}$$

$$\frac{y}{36.0} = \tan 51.0^\circ$$

$$y = 36.0(\tan 51.0^\circ)$$

$$h = y - x \qquad y = 44.5 \text{ ft}$$

$$\therefore h = 44.5 - 33.0 = 11.5 \text{ ft}$$

شکل (۲۹ــ۱)

تمرین (سؤالات عبارتی)

۱ـ یک آنتن تیلویزیون بالای سطح زمین سایه افگنده،که طول آن ′۲٤٦ است . از انجام این سایه زاویه ایلویشن (angle of elevation) °٤٨ درجه است ، ارتفاع آنتن را دریافت کنید ؟

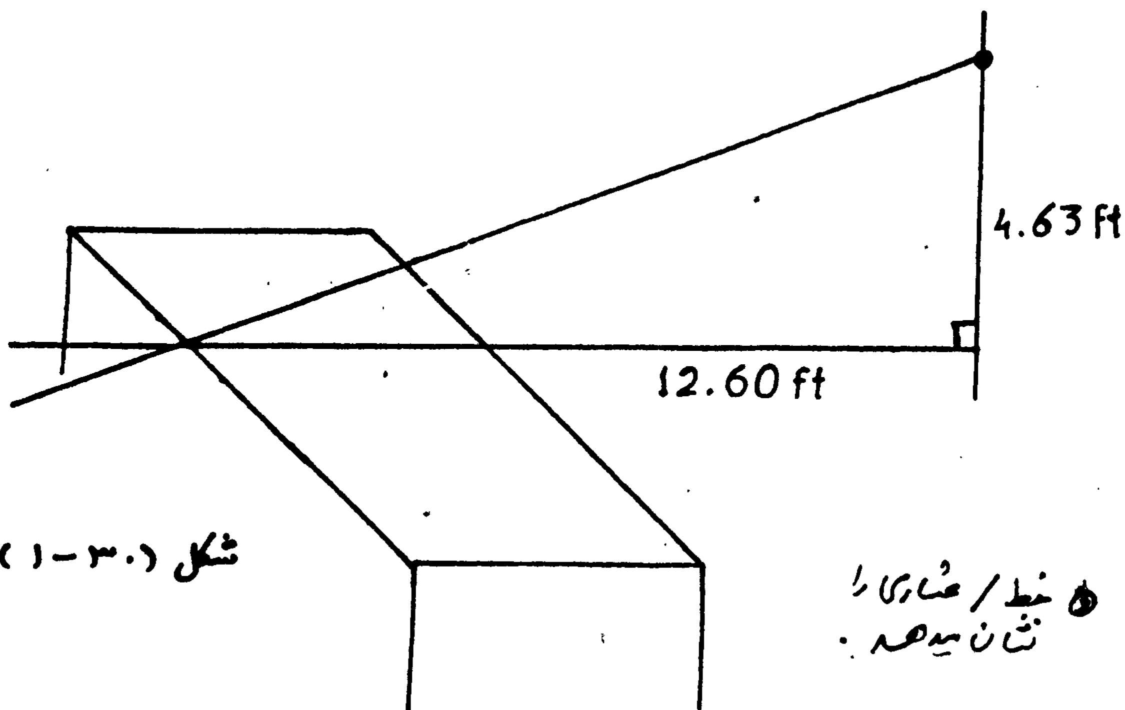
۲ـ یک ریسمان از سر یک پایه به فاصلهٔ ۱۰/۵ متر دورتر از قاعدهٔ پایه قایم شده . ریسمان با پایهٔ مذکور زاویهٔ °۲۸/۰ درجه را میسازد. ارتفاع پایه را دریافت کنید ؟

۳ـ رامپهٔ بارگیری از سطح زمین ′۲/۲۵ ارتفاع دارد. یک سطح مایل که زاویهٔ °۲۰ با سطح زمین میسازد ساخته میشود. طول این سطح مایل را معلوم کنید ؟

٤ـ یک زینه که طول آن ′۲۰ است به کنار بام خانه گذاشته شده ، زاویه بین زینه و سطح زمین °۷۰ درجه است، قاعدهٔ زینه از دیوار خانه چقدر فاصله دارد ؟

۵ـ شعاع چراغ های یکموتر″۳ درفاصلهٔ هر 25 پائین می افتد، زاویه بین شعاع چراغ ها و سرک چند درجه است ؟

٦ـ یک مرمی طوری فیر گردید که از روی میز مماس گذشته،دریک دیوار به فاصلهٔ ′۱۲/٦۰ از نقطهٔ تماس (با میز) ، به ارتفاع ′٤/٦۳ بلند تر در دیوار داخل شده است . دریافت کنید که مرمی نظر به سطح زمین با چند درجه زاویه فیر گردیده است . شکل (۳۰ـ۱) :



شکل (۳۰ـ۱)

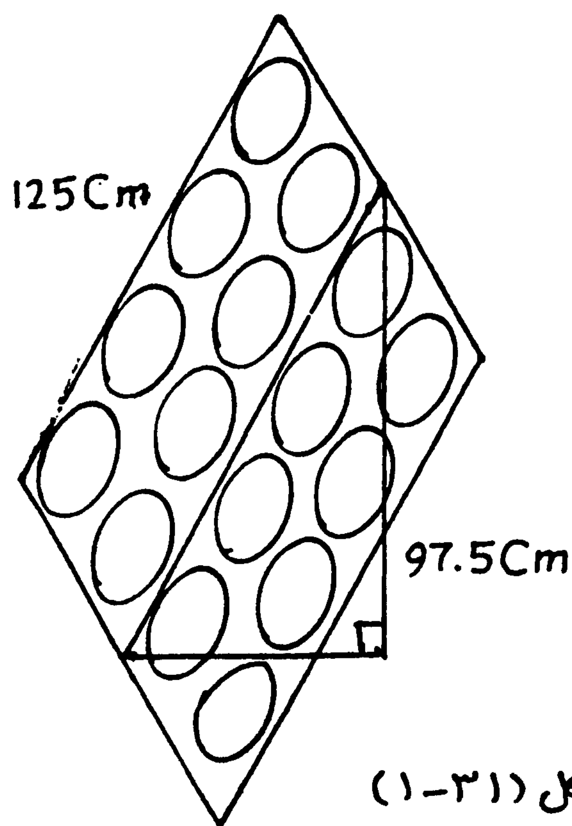
خط / عشاری را نشان میدهد .

۷ _ از فراز یك برج که ارتفاع آن ۱۱۲/۵ متر است ، زاویهء دیپریشن (Angle of depression) به سوی کشتی در داخل آب °۲۲/۳۵ درجه است ، معلوم کنید که کشتی موصوف از قاعدهء برج چقدر دور است .

۸_ دریك خانه ، راه رو دروازه ′۲/٦٥ از زمین بلندتر است . جهت استفادهء معیوبین یك سطح مایل به این دروازه ساخته میشود ، که با سطح زمین زاویه °۹ درجه را میسازد طول این سطح مایل را معلوم کنید.

۹_ در روی یك نقشهء تعمیر ، دیوارهای یك اتاق مستطیل شکل ٦/۲۵ سانتی متر در ۳/۸۵ سانتی متر است . زاویه بین ضلع طویل و قطر آن را دریافت کنید ؟

۱۰_ یك دستگاه انرژی آفتاب که طول آن ۱۲۵سانتی متر است،توسط یك راد عمودی-که طول آن ۹۷/۵ سانتی متر است،قایم شده، (شکل ۳۱_۱) زاویه بین دستگاه و سطح زمین چقدر است ؟



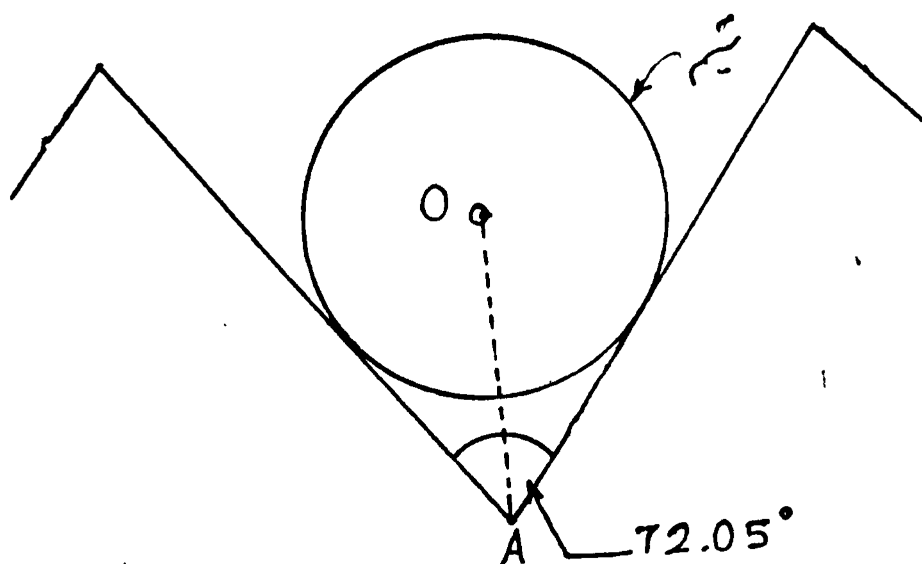
شکل (۳۱-۱)

۱۱_ یك فوارهء آب به سرعت 590m/hr وبه زاویهء ′۲۰ °۱۵ جریان دارد ، ارتفاع فواره بعد ازمدت ′۲ دقیقه چقدر خواهد بود ؟

۱۲ به تعداد ده عدد ریپیت (rivets) بالای یك محیط دایره به فواصل مساوی نصب

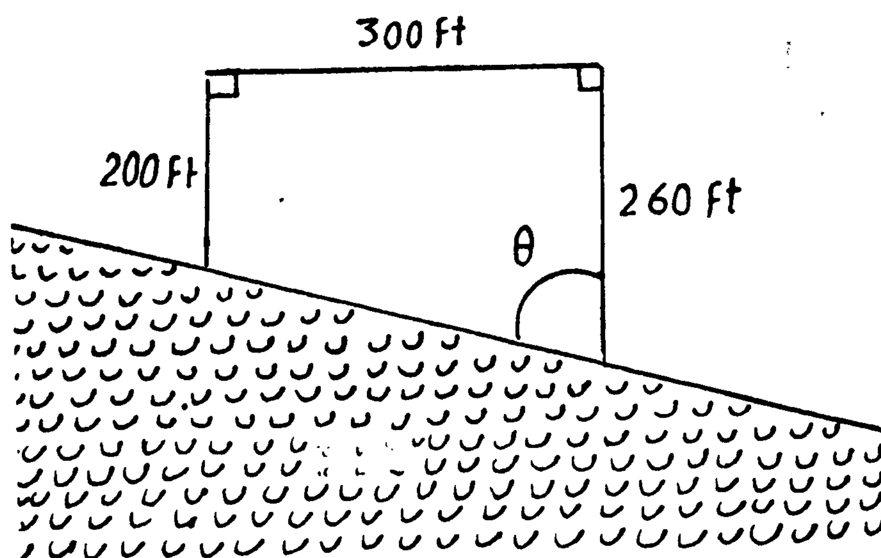
گردیده،اگر فاصلهء مرکز یك ریپیت به مرکز ریپیت دیگر 6/25cm باشد،درینصورت[۲] دایره چند خواهد بود؟

۱۳ـ در شکل ذیل اگر قطر سیم مساوی ۰/۰۵٥٦۲″ و زاویهء″Â°۷۲/۰۵ باشد، فاصلهء OA را دریافت کنید؟



شکل (۳۲-۱)

۱٤ـ در شکل (۳۲ـ۱) زاویهء $\hat{\theta}$ را معلوم کنید؟

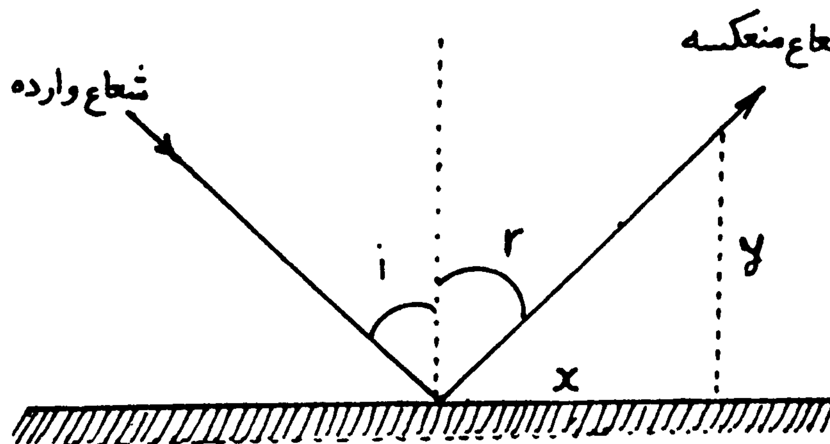


شکل (۳۳-۱)

۱٥ـ یك سرویر میخواهد که عرض یك دریا را بداند او از نقطه C واقع یك طرف دریا به نقطه B در طرف دیگر دریا نظر میکند. و بعداً فاصلهء بین نقطه C و نقطه A را

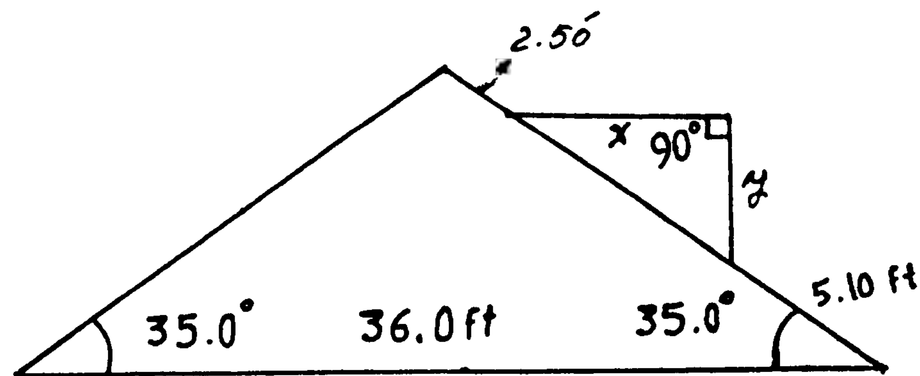
طوری اندازه میکند که زاویه C یك زاویهء قایمه میشود. اگر فاصلهء CA ″۴۱۲/۵′ باشد و زاویهء A را (۵۶/۶۷°) درجه بخواند، عرض دریا را دریافت کنید؟

۱۶ـ در شکل (۳۴ـ۱) اگر زاویهٔ ($\hat{i}$) ۴۲/۱۵° و فاصلهٔ x ۷/۴۲۱ سانتی متر باشد، فاصلهء y را دریافت کنید.



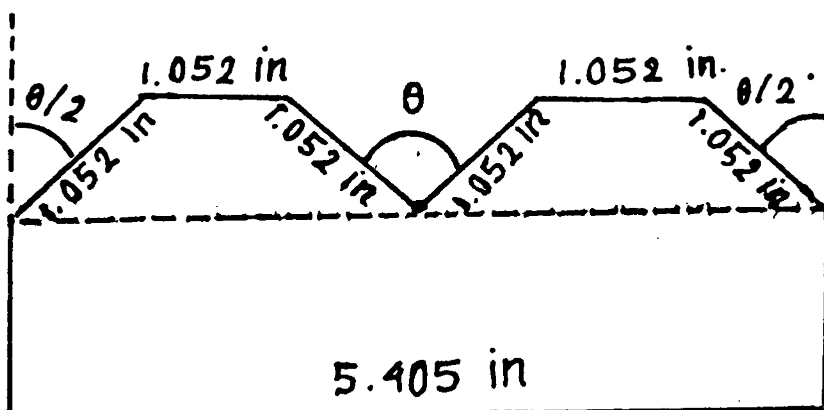
شکل (۳۴-۱)

۱۷ـ در شکل (۳۵ـ۱) قیمت های x، و y را دریافت کنید؟



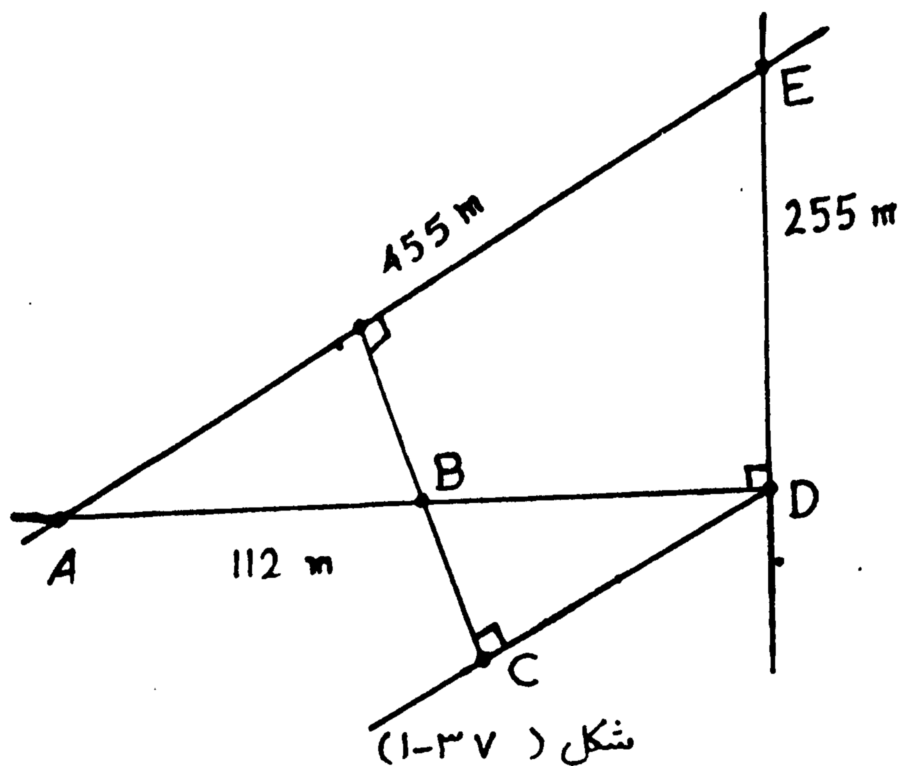
شکل (۳۵-۱)

۱۸ـ در شکل (۳۶ـ۱) زاویهء θ را دریافت کنید؟



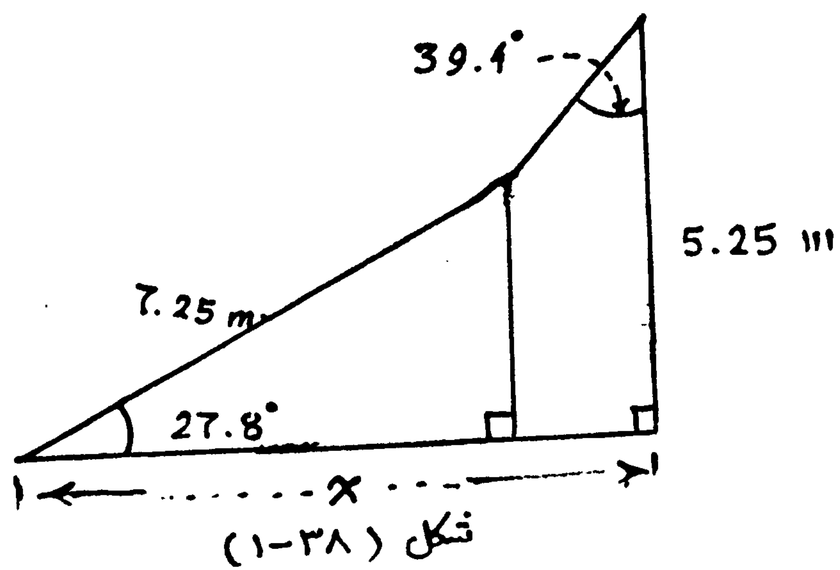
شکل (۳۶-۱)

۱۹ــ در شکل (۳۷ــ۱) فاصلهء BD را دریافت کنید ؟



شکل (۳۷-۱)

۲۰ــ در شکل (۳۸ــ۱) طول x را دریافت کنید ؟



شکل (۳۸-۱)

تمرينات فصل اول

تمرين اول : از تمرين ۱ الى ٤، خوردترين زاويهء مثبت و خوردترين زاويهٔ منفى را كه با زاويهء هاى ذيل كوترمينل باشند، دريافت كنيد؟

1–4: 17.0°, 248.3°, -217.5°, -7.6°

تمرين دوم : از تمرين ٥ الى ٨، زاويه هاى ارائه شده را به سيستم اعشارى تبديل كنيد؟

5-$31^\circ.54'$, 6-$174^\circ.45'$, 7-$38^\circ.6'$, 8-$321^\circ.27'$

تمرين سوم : از تمرين ۹ الى ۱۲، زاويه هاى ارائه شده را به دقيقه تبديل كنيد؟

9-17.5°, 10-65.4°, 11-49.7°, 12-126.25°

تمرين چارم : توابع مثلثاتى اى زاويه هايى را دريافت كنيد كه ضلع دوم آنها از نقاط ذيل عبور كند؟

13.(24,7) 14.(5,4) 15.(4,4) 16.(1.2,0.5)

تمرين پنجم : در تمرين ۱۷ الى ۲٥، بعضى توابع مثلثاتى داده شده است توابع ديگرآنها را دريافت نمائيد؟

17. معلوم $\sin\theta = \frac{5}{13}$، مجهول $\cos\theta = ?$ ، $\cot\theta = ?$
18. // $\cos\theta = 3/8$ // $\sin\theta = ?$ ، $\tan\theta = ?$
19. // $\tan\theta = 2$, // $\cos\theta = ?$ ، $\csc\theta = ?$
20. // $\cot\theta = 4$, // $\sin\theta = ?$ ، $\sec\theta = ?$

تمرين ششم : از تمرين ۲۱ الى ۲٤، قيمت توابع مثلثاتى را توسط كلكوليتر دريافت كنيد!

21.$\sin 72.1^\circ$ 22.$\cos 40.3^\circ$ 23$\tan 61.64^\circ$ 24.$\sin 49.09^\circ$

تمرين هفتم : با استفاده از كلكوليتر زاويهٔ θ را معلوم كنيد؟

25. $\cos\theta = 0.950$ 26. $\sin\theta = 0.63052$
27. $\tan\theta = 1.574$ 28. $\cos\theta = 0.1345$

فصل اول

توابع مثلثاتی

پرابلم های عملی در ساحات ساینس و تکنالوژی اکثراً با استفاده از مثلثات که یك شعبهء جداگانهء علم ریاضی میباشد، حل میشوند. مثلثات طوری که از نامش پیداست، با مطالعهء مثلث و بالخاصه (مثلث قایم الزاویه) آغاز میشود.

طول فاصله های که تعیین آن مشکلات و ممانعت های فزیکی ، مانند: کوه، دریا وفضا ناممکن باشد، با استفاده از مثلثات میتوانیم آنرا بدون آنکه به خود محل برویم معلوم کنیم .

ارتفاع کوه، ارتفاع درخت ، عرض دریا، ارتفاع تعمیر، ارتفاع طیاره، ارتفاع آنتن ها، برج ها، مناره ها و همچنان پرابلم های فزیك دربارهء قوه ها، سرعت، تعجیل و حرکت و امثال آن ، صرف ازطریق مثلثات حل شده میتوانند. همچنان در رشتهء برق اکثر مسایل به کمك مثلثات حل وفصل میگردد.

خواص اساسی مثلث قایم الزاویه به ما اجازه میدهدکه، بعضی روابط اساسی را که توابع مثلثاتی نامیده میشود، میان زاویه ها واضلاع آن ایجاد کنیم. همین توابع است که انکشاف علم ریاضی را بنیان گذاری نموده ، درساحهء تکنالوژی سهولت های لازم را فراهم ساخته است .

درین فصل ما اساسات توابع مثلثاتی را با کاربرد ابتدائی ای آن معرفی می کنیم، درفصل های بعدی سایر موضوعات مثلثات را مورد بحث قرار میدهیم . اینك بحث خودرا با توضیح «مفهوم زاویه» آغاز می نمائیم .

زاویه (Angle)

تعریف زاویه :

زاویه از حرکت دورانی یك (نیم خط) که با یك انجام خود از حالت اولی به حالت

تمرین هشتم : از تمرین ۲۹ الی ۳۲، قیمت توابع مثلثاتی را از جدول (۳) دریافت کنید.

29. $\tan 59^\circ 20'$ 30. $\sin 82^\circ 40'$ 31. $\cos 55^\circ 30'$ 32. $\tan 23^\circ 50'$

تمرین نهم : ازتمرین ۳۳ تا۳۶، زاویهء θ از روی جدول دریافت کنید.

33. $\sin\theta = 0.5323$ 34. $\tan\theta = 1.264$

35. $\cos\theta = 0.4669$ 36. $\sin\theta = 0.1048$

تمرین دهم : از تمرین ۳۷ الی ۴۸، مثلث های قایم الزاویهء مطلوب را حل کنید. ؟

37: $A = 17.0^\circ$, $b = 600$ 38. $B = 68.4^\circ$, $a = 1080$

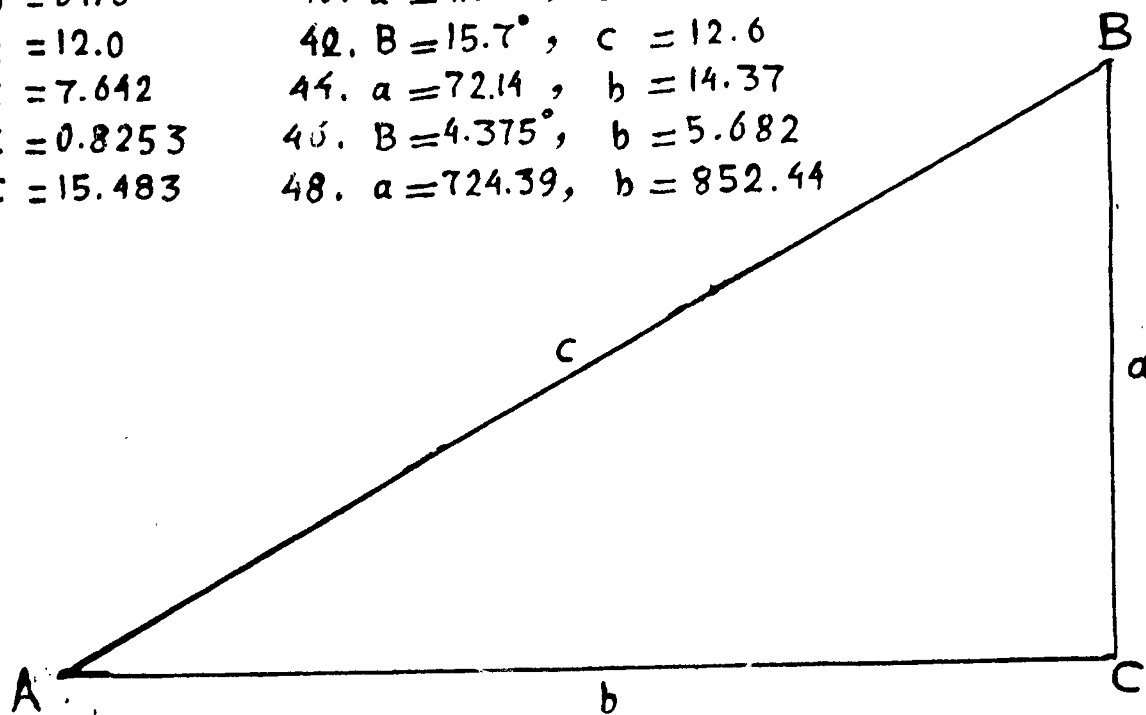
39: $a = 81.0$, $b = 64.5$ 40. $a = 1.06$, $c = 3.82$

41: $A = 37.5^\circ$, $a = 12.0$ 42. $B = 15.7^\circ$, $c = 12.6$

43: $b = 6.508$, $c = 7.642$ 44. $a = 72.14$, $b = 14.37$

45: $A = 49.67^\circ$, $c = 0.8253$ 46. $B = 4.375^\circ$, $b = 5.682$

47: $a = 11,652$, $c = 15.483$ 48. $a = 724.39$, $b = 852.44$



شکل (۳۹-۱)

سوالات عبارتی :

۱۳_ در تحلیل قوه ها بالای یك "چپر است" ، یکی از قوه های عمودی (Fy)، از معادلهء ($Fy = F \cos\hat{\theta}$) محاسبه میشود. اگر قوه (F) مساوی ٥٦ نیوتن و زاویهء $\hat{\theta}$ ، ۲۷/٥° درجه باشد. قوهء عمودی ای Fy را دریافت کنید ؟

١٤_ یك جسم بالای یك سطح مستوی مایل به فاصلهء S می لخشد ، معادلهء سرعت فرمول ($V=\sqrt{2gs\ \sin\hat{\theta}}$) است،که درین فرمول (g) تعجیل جاذبه زمین،$\hat{\theta}$ زاویه مستوی مایل با سطح زمین است . قیمت V را دریافت کنید، درصورتیکه ($\hat{\theta}=25.2^\circ, S=35.5'$) ($g=32.2ft/sec^2$) باشد.

١٥_ معادلهء که جهت دریافت جریان لحظوی در برق بکار میرود عبارت است از: ($i= Im\ Cos\theta$) قیمت i را دریافت کنید درصورتیکه $Im=56mA$ و ($\hat{\theta}=10.55^\circ$) باشد.

١٦_ برای دریافت ارتفاع تعمیر، یك سرویر که به فاصلهء ۲۲٥ متر از تعمیر دورتر است از معادلهء $h=220\tan\hat{\theta}$ استفاده میکند که $\hat{\theta}$ زاویهٔ ایلویشن به بام تعمیر است ، اگر ($h=130m$) باشد، زاویهء $\hat{\theta}$ را معلوم کنید ؟

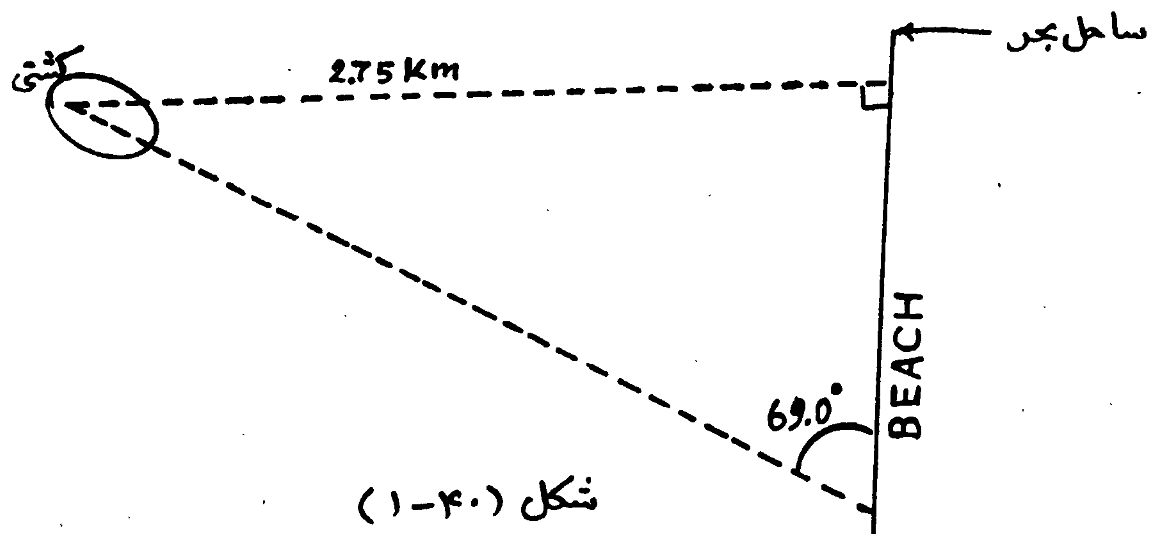
١٧_ فرمولی که توسط آن قطر گراری را میتوان محاسبه کرد، ($D=\frac{1}{2}N\sec\hat{\theta}$) است، زاویهٔ $\hat{\theta}$ را بنام (Spiral) یاد میکند. اگر ($D=6.75''$ و $N=20$) باشد، $\hat{\theta}$ را دریافت کنید ؟

١٨_ تاریك کاغذ پران در هوا ٥٦٠' و زاویهء ایلویشن (angle of elevation) آن ٦٤° درجه است،ارتفاع کاغذ پران را دریافت کنید؟

١٩_ یك کاسهء نیم کرهٔ که بحالت افقی موقعیت دارد.شعاع داخلی آن ٦/٥٠'' است، اگر کاسه تا عمق ۲/١٠'' از آب پر باشد، به کدام زاویه کج شودتا (قبل از آن) که آب از آن بیریزد ؟

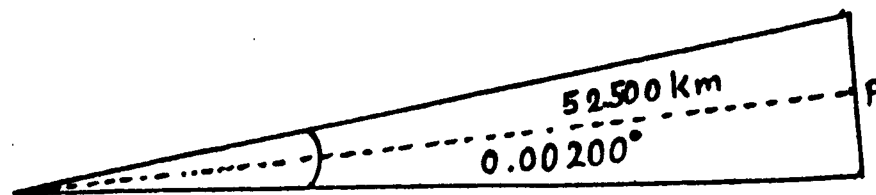
۲۰_ فاصله افقی ای اعظمی ای یك (رقاص) ۹/٥٠ سانتی متر است ، اگر طول تار آن ۳۸ سانتی متر باشد، زاویه تار رقاص را معلوم کنید ؟

۲١_ در شکل (٤٠_١) طول ساحل بحر (Beach) را دریافت کنید.



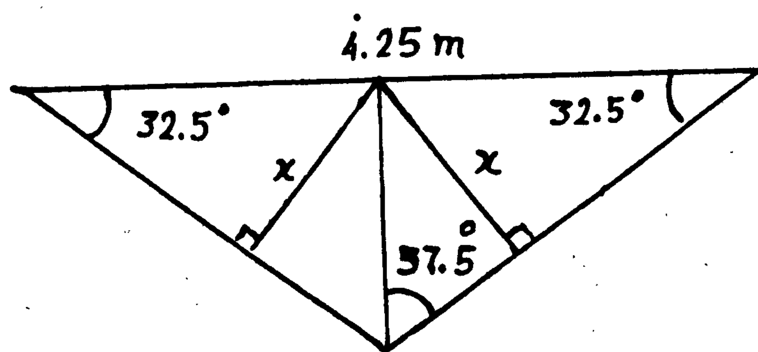
شکل (۴۰-۱)

۲۲ـ یك شعاع لیزر به ـ زاویهء (°۰/۰۰۲۰۰) از یك نقطه عرضاً منتشر میشود، قطر شعاع مذکور را در فاصلهء (52500.km) دورتر دریافت کنید. شکل (۴۱ـ۱)



۲۲ـ شکل (۴۱-۱)

۲۳ـدر شکل (۴۲ـ۱) طول (X) را دریافت نمائید.



شکل (۴۲-۱)

فصل دوم

توابع مثلثاتی هر " زاویه "

در دروس گذشته توابع مثلثاتی ای زاویهء حاده را مطالعه نمودیم، وقتیکه توابع مثلثاتی ای زاویهٔحاده را بدانیم ، به اساس آن توابع مثلثاتی هر زاویه را پیدا کرده میتوانیم درین فصل برعلاوهٔ ، آنکه زاویه های مشخص با درجه را مورد بحث قرار میدهیم ، زاویه های را که به رادیان (Radian) ارائه میشود. نیز مطالعه مینمائیم .

علامات توابع مثلثاتی :

تعریفات توابع مثلثاتی را که در دروس گذشته مطالعه نمودیم، اینکه بار دیگر آنهارا از نظر میگذرانیم ، ما در این بحث نقطهء (x,y) را یك نقطهء کیفی بالای ضلع دوم زاویهء $\hat{\theta}$ که دارای شعاع ویکتوری $\vec{r}$ میباشد ، قبول کرده،تعریفات ذیل را یادآوری می نمائیم .

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{r} \quad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \csc\theta = \frac{r}{y}$$

که (r) همیش مثبت بوده،و علامهء توابع مثلثاتی ای هر زاویه به علامات(x، وy) مربوط میشود ، بطور مثال:

هرگاه ضلع دوم زاویه در ربع اول و دوم موقعیت داشته باشد. ($\sin\hat{\theta}$) مثبت میباشد.

و اگر ضلع دوم زاویه در ربع سوم و چارم موقعیت داشته باشد درین صورت علامهٔ ($\sin\hat{\theta}$) منفی میباشد. این واقعیت ازآن جهت صدق میکند-که علامهء (y) بالاتر از محور (x) مثبت و علامهء (y) پائین تر از محور (x) منفی میباشد.

مثال الف : $\sin 20^\circ$ مثبت است، زیرا ضلع دوم این زاویه در ربع اول است قیمت ($\sin 160^\circ$) نیز مثبت است، زیرا ضلع دوم این زاویه در ربع دوم واقع است . برخلاف ، $\sin 200^\circ$، و $\sin 340^\circ$ هردو منفی اند ، زیرا ضلع دوم این دو زاویه باالترتیب در ربع سوم و چارم موقعیت دارند.

علامهء $\tan\hat{\theta}$ مربوط است به نسبت y برx در ربع اول ، که x، و y هردو مثبت است. پس نسبت y بر x نیز مثبت میشود . در ربع سوم x، و y هردو منفی میباشند. لهذا: نسبت y بر x مثبت میشود.

مثال ب: قیمت $\tan 20^\circ$، $\tan 200^\circ$ هردو مثبت اند ، زیرا ضلع دوم این دو زاویه باالترتیب درربع اول و سوم موقعیت دارند. وبرخلاف $\tan 160^\circ$، $\tan 340^\circ$ هردو منفی میشوند. زیرا ضلع دوم آن ها باالترتیب در ربع دوم و چارم موقعیت دارند.

علامهٔ $\cos\hat{\theta}$ مربوط است به علامهء x ،چون x در ربع اول و چارم مثبت است،لهذا: Cos نیز مثبت میشود ،به همین ترتیب $\cos\hat{\theta}$ در ربع دوم و سوم منفی میشوند.

مثال ج : قیمت $\cos 20^\circ$، و $\cos 340^\circ$ هردو مثبت اند. زیرا این دو زاویه در ربع اول و چارم موقعیت دارند. $\cos 160^\circ$ ، $\cos 200^\circ$ هردو منفی میشوند،زیرا هردو زاویه باالترتیب در ربع دوم و سوم موقعیت دارند.

چون $\csc\hat{\theta}$ معکوس $\sin\hat{\theta}$ است،و هردو به قیمت y، و r ارتباط میگیرند ، لهذا:علامه های $\sin\hat{\theta}$ و $\csc\hat{\theta}$ باهم یکی اند. همچنان $\cot\hat{\theta}$ که معکوس $\tan\hat{\theta}$ میباشد ،باهم علامات مشابه دارند ،وهم نیز $\sec\hat{\theta}$ که معکوس $\cos\hat{\theta}$ تشخیص میشودد ،دارای علامات مشابه میباشند.

یك طریقهء عملی جهت تشخیص علامات توابع مثلثاتی در اینجا خلاصه میگردد:

- تمام توابع مثلثاتی ای زاویهء که در ربع اول واقع شود ، مثبت است .
- $\sin\hat{\theta}$ و$\csc\hat{\theta}$ که در ربع دوم واقع شوند مثبت اند.
- $\tan\hat{\theta}$، و$\cot\hat{\theta}$ که در ربع سوم واقع شوند نیز مثبت اند.
- $\cos\hat{\theta}$ ، و $\sec\hat{\theta}$ که در ربع چارم واقع باشند،مثبت اند. تمام توابع دیگر منفی میباشند.

ناگفته نباید گذاشت که علامه یابی فوق زاویه های که « اضلاع ربع » (quaderantal angles) دارند ، دربر نمیگیرد. زاویای اضلاع ربعی آن ها اند که ضلع دوم آن ها بالای یکی ازمحور ها (x، یاy) منطبق گردد ، مانند زاویه های 0°، 90°، 180°، 270°، 360° ،

مثال د: توابع مثلثاتی ای زاویه های ذیل : ثبت اَت .

– مثال د : توابع مثلثاتی زاویه های ذیل : ....

$$\sin 50^\circ ,\ \sin 150^\circ ,\ \sin(-200^\circ),$$
$$\cos 8^\circ ,\ \cos 300 ,\ \cos(-40^\circ),\ \tan 220^\circ$$
$$\tan(-100^\circ),\ \cot 260^\circ ,\ \cot(-310^\circ), \sec 280^\circ$$
$$\sec(-37^\circ),\ \csc 140^\circ ,\quad \csc(-190^\circ).$$

.... تماما مثبت میباشند.

– مثال ها : توابع مثلثاتی زاویه های ذیل : ....

$$\sin 190^\circ ,\ \sin 325^\circ ,\ \cos 100^\circ$$
$$\cos(-95^\circ),\ \tan 172^\circ ,\ \tan 295^\circ ,\ \cot 105^\circ ,$$
$$\cot(-6^\circ),\ \sec 135^\circ ,\ \sec(-135^\circ), \csc 240^\circ ,$$
$$\csc 355^\circ .$$

.... تماماً منفی میباشند.

– مثال و : توابع مثلثاتی ای زاویهء $\hat{\theta}$ را که ضلع دوم آن از نقطهء $(-1 , \sqrt{3})$ عبور میکند دریافت کنید؟

حل : چون $(x = -1$ ، و $y = \sqrt{3})$ است. بس (r) مساوی (۲) میشود .... نظر به قضیهٔ فیتاگورث $(c^2 = b^2 + a^2)$ لهذا توابع مثلثاتی ای زاویهٔ $\hat{\theta}$ عبارت اند از :

$$\sin\theta = +\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\tan\theta = -\sqrt{3} \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\mathrm{cec}\,\theta = -2 \qquad \csc\theta = +\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(تمرین) از تمرین ۱ الی ۸ علامات توابع مثلثاتی ای زاویا های ذیل را معلوم کنید.؟

2-1

1. $\sin 60^\circ, \ \cos 120^\circ, \ \tan 320^\circ$
2. $\tan 185^\circ, \ \sec 115^\circ \ \ \sin(-36^\circ)$
3. $\cos 300^\circ, \ \csc 97^\circ, \ \cot(-35^\circ)$
4. $\sin 100^\circ, \ \sec(-15^\circ) \ \ \cos 188^\circ$
5. $\cot 186^\circ, \ \sec 280^\circ, \ \sin 470^\circ$
6. $\tan(-91^\circ), \ \csc 87^\circ \ \ \cot 103^\circ$
7. $\cos 700^\circ, \ \tan(-560^\circ), \ \csc 530^\circ$
8. $\sin 256^\circ, \ \tan 321^\circ \ \ \cos(-370^\circ)$

توابع مثلثاتی ای زاویهء $\hat{\theta}$ را دریافت کنید که ضلع دوم آن از نقاط ذیل عبور میکند.

9. $(2,1)$ 10. $(-1,1)$ 11. $(-2,-3)$ 12. $(4,-3)$
13. $(-5,12)$ 14. $(-3,-4)$ 15. $(5,-2)$ 16. $(3,5)$

در تمرین ۱۷ الی ۲٤ ، ربع را مشخص نمائید که ضلع دوم زاویهء $\hat{\theta}$ نظر به حالت های ذیل در آن واقع میگردد. وحالات نیز صدق کند.

17. $\sin\theta$ مثبت ، $\cos\theta$ منفی
18. $\tan\theta$ مثبت، $\cos\theta$ منفی
19. $\sec\theta$ منفی ، $\cot\theta$ منفی
20. $\cos\theta$ مثبت، $\csc\theta$ منفی
21. $\csc\theta$ منفی ، $\tan\theta$ منفی
22. $\sec\theta$ مثبت، $\csc\theta$ مثبت
23. $\sin\theta$ منفی ، $\tan\theta$ مثبت
24. $\cot\theta$ منفی، $\sin\theta$ منفی

۲ـ توابع مثلثاتی هریک زاویه:

توابع مثلثاتی ای زاویه های حاده را در دروس گذشته مطالعه کردیم،و در بخش آخر راجع به علامهء توابع مثلثاتی نیز بحث کافی صورت گرفت . درین مرحله ما باید نشان بدهیم که چطور توابع مثلثاتی ای زاویه های مختلف را معلوم کرده میتوانیم .

این معلومات در موضوع تحلیل قوه ها، ویکتورها و مثلث های کیفی مورد بحث قرار گرفته میشود. بخاطر باید داشت،که توابع مثلثاتی ای زاویه ای راکه کلان تر از °۹۰ درجه باشد ، نمیتوانیم مستقیما ذریعهء کلکولیتر معلوم نمائیم . همچنان از جدول مثلثات نیز مستقیما دریافت شده نمیتواند. (تحلیل ذیل در نظر گیرید) .

هریك زاویه که درحالت ستندارد (Standerd Position) موقعیت داشته باشد ، باچند زاویهء مثبت که کمتر از ۳٦۰ درجه باشد ، "کوترمینل" (Coterminal) میشود . چون یك ضلع زاویه های "کوترمینل" باهم مشترك میباشند ، لهذا،توابع مثلثاتی ای زاویه های "کوترمینل" از

نقطهٔ نظر کمیت، باهم یکی میباشند. پس اگر ما صرف توابع مثلثاتی ای زاویه کمتر از ۳۶۰° را پیدا کرده بتوانیم ، توابع زاویه های دیگر نیز بآسانی معلوم شده میتواند.

مثال الف :

زاویه های جوره ئی ذیل باهم کوترمینل میباشند.

$+390°$ و $30°$ ، | $-60°$ و $300°$

$+900°$ و $180°$ ، | $-150°$ و $210°$

قیمت مطلقهٔ توابع مثلثاتی ای این زاویه های جوره باهم مساوی اند .

بحث فوق چنین خلاصه میشود که توابع مثلثاتی ای زاویه های کوترمینل باهم مساوی اند مثلاً :

$\sin 390° = \sin 30°$ ، $\tan(-150°) = \tan 210°$

$\sin(-60°) = \sin 300°$ ، $\cos 900° = \cos 180°$

از تعریفات توابع مثلثاتی ، ما میدانیم که قیمت های این توابع مربوط است به قیمت های x، y، وr. قیمت توابع زاویه های ربع دوم (از نظر(قیمت مطلقه) مساوی به زاویه های ربع اول است، بطور مثال : در شکل (۱-۲) برای زاویهٔ $\hat{\theta}_2$ که ضلع دوم آن از نقطهٔ(-3/4) $(-3,4)$ عبور میکند $\tan \hat{\theta}_2 = \frac{-4}{3}$ است.و $\hat{\theta}_1$ که ضلع دوم آن از نقطهٔ (3/4) $(3,4)$ عبور مکنید ، $\tan \hat{\theta}_1 = \frac{4}{3}$ است.میبینیم که مثلث های که زاویه های $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\alpha}$ دران شامل باشند ، باهم مساوی و منطبق اند .

بعباره دیگر : $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\alpha}$ باهم مساوی اند. لهذا: توابع مثلثاتی $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ از نقطهٔ نظر قیمت مطلقهٔ نیز باهم مساوی اند. به عباره دیگر: |تمام توابع زاویه θ_1| = |تمام توابع زاویه θ_2| . یعنی . .

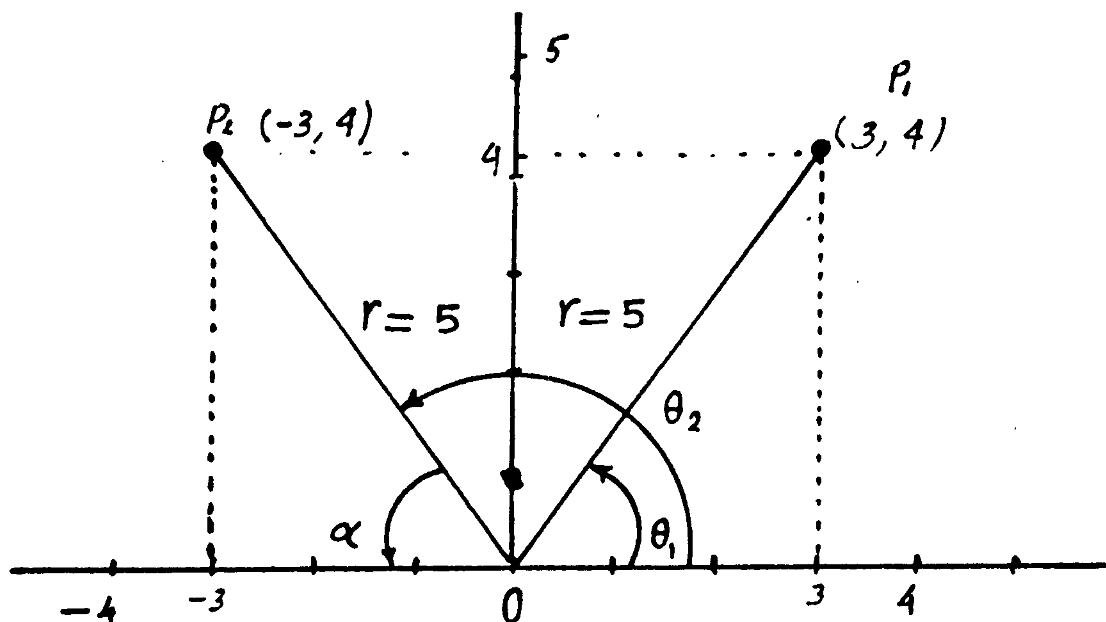
$$|F(\theta_1)| = |F(\theta_2)| = |F(\alpha)| \quad \text{......... (٢-٣)}$$

حرف (F) هرگونه تابع، و در اینجا توابع مثلثاتی را نماینده گی میکند.

زاویهء ($\hat{\alpha}$) بنام زاویهء ماخذ (reference angle) برای زاویهء $\hat{\theta}_2$ یاد میشود.

زاویهٔ ماخذ : زاویهٔ ماٌخذ یك زاویهٔ، آن زاویهء حاده است،که میان ضلع دوم زاویه و محور (x) تشکیل میشود.

مثال : زاویهء $\hat{\alpha}$ زاویهء ماخذ زاویهء $\hat{\theta}_2$ میباشد.



شکل (١- ٢)

با استفاده از رابطهء (٢-٢) و این حقیقت‌که $\hat{\alpha} = 180^\circ - \hat{\theta}_2$ است، ما خلاصه کرده میتوانیم . که قیمت توابع مثلثاتی ای هریك زاویه در ربع دوم از رابطهٔ ذیل دریافت میشود.

$$F(\theta_2) = \pm F(180^\circ - \theta_2) = \pm F(\alpha) \quad \text{........ (٢- ٣)}$$

علامه مربوط به اینست ، که آیا تابع در ربع دوم مثبت است یا منفی .

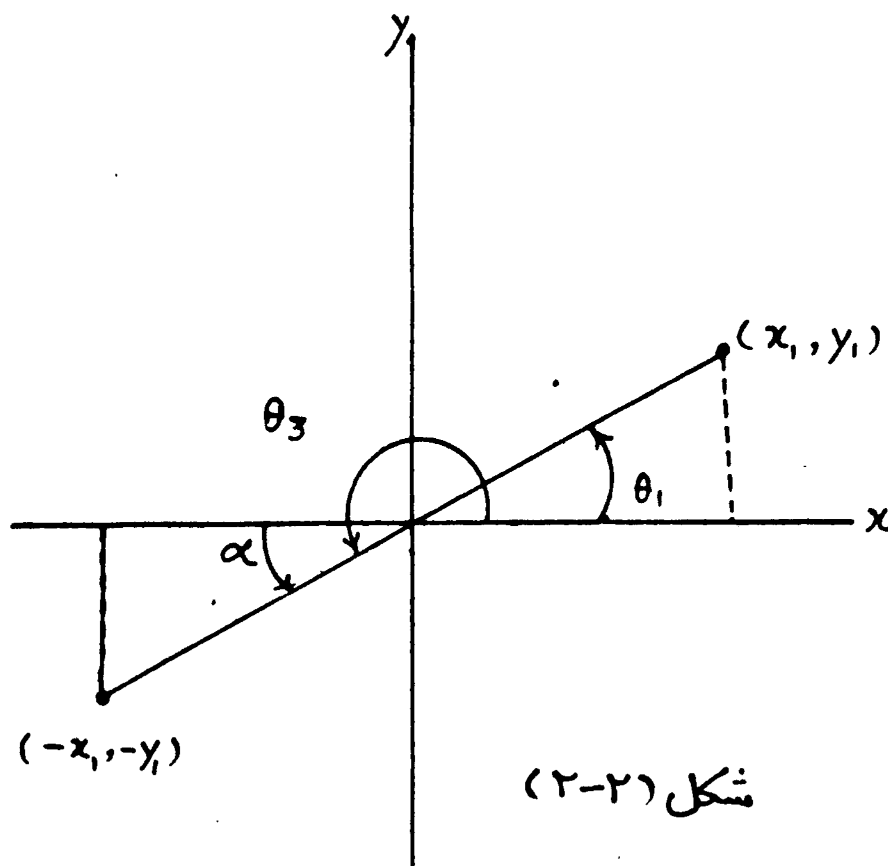
مثال (ب) : در شکل (١-٢) توابع مثلثاتی $\hat{\theta}_2$ قرار ذیل اند:

$$\sin\theta_2 = +\sin(180^\circ-\theta_2) = +\sin\alpha = +\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$$
$$\cos\theta_2 = -\cos\theta_1 = -\frac{3}{5}$$
$$\tan\theta_2 = -\frac{4}{3}\ ,\ \cot\theta_2 = -\frac{3}{4}$$
$$\sec\theta_2 = -\frac{5}{3}\ ,\ \csc\theta_2 = +\frac{5}{4}$$

به همین ترتیب ما میتوانیم فورمولهای توابع مثلثاتی، ربع سوم ، و ربع چارم را نیز بوجود بیاوریم . در شکل (۲ـ۲) ما میدانیم که ($\hat{\alpha}$) یعنی زاویهٔ مأخذ، با تفریق 180° از $\hat{\theta}_3$ دریافت میشود، وتوابع $\hat{\alpha}$ و $\hat{\theta}_1$ از نقطه نظر قیمت مطلقه باهم مساوی اند . در شکل (۲ـ۳) ($\hat{\alpha}$) یا زاویهٔ مأخذ با تفریق کردن $\hat{\theta}_4$ از 360° دریافت شده میتواند.

لهذا، ما داریم :

$$F(\theta_3) = \pm F(\theta_3 - 180^\circ) \quad \cdots\cdots\ (۲-۴)$$
$$F(\theta_4) = \pm F(360^\circ - \theta_4) \quad \cdots\cdots\ (۲-۵)$$



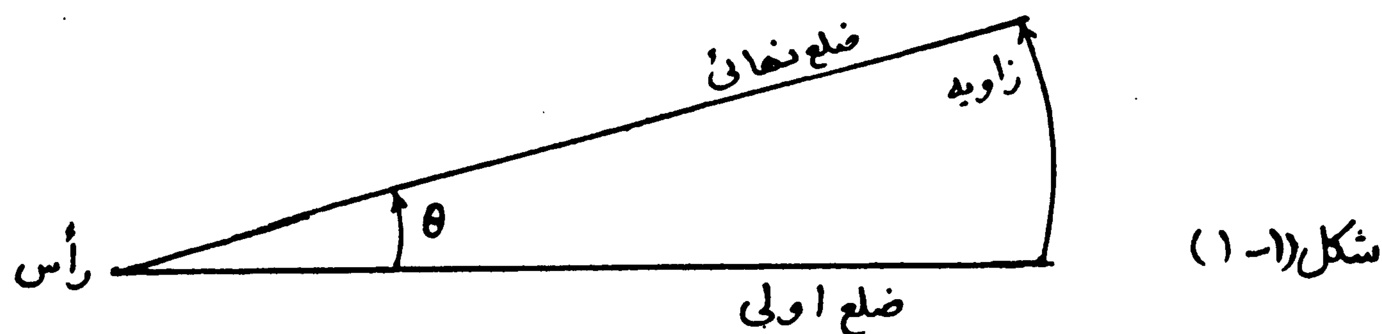
شکل (۲-۲)

نهائی دوران کند ، تشکیل میشود.

«نیم خط» آن خط مستقیم است که یك انجام آن ثابت و معلوم باشد .

حالت اولی این نیم خط را بنام «ضلع اولی» (Initial side) زاویه،و حالت دومی این خط را بعد از یك حرکت دورانی بنام «ضلع نهائی» (Terminac side) (ضلع دومی) زاویه یاد میکنند.

شکل (۱_۱)



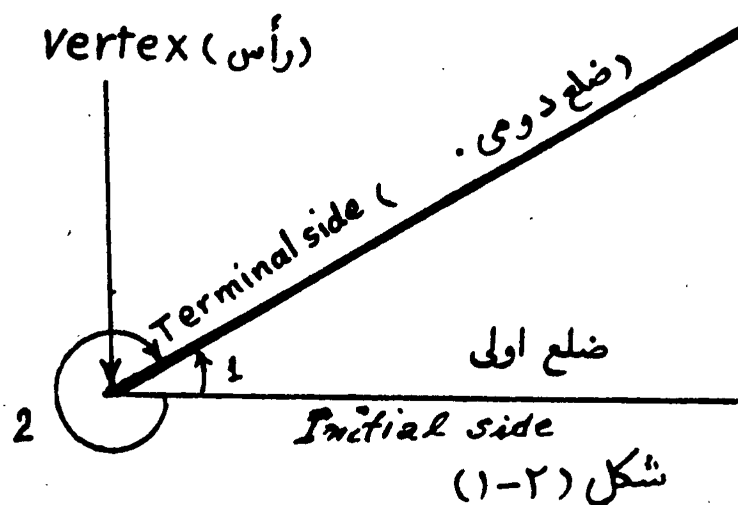
شکل (۱- ۱)

نقطهٔ ثابت نیم خط را بنام راس (Vertex) زاویه یاد میکند. خود زاویه مقدار حرکت دورانی است،که «نیم خط» از حالت اولی تا به حالت نهائی طی میکند.

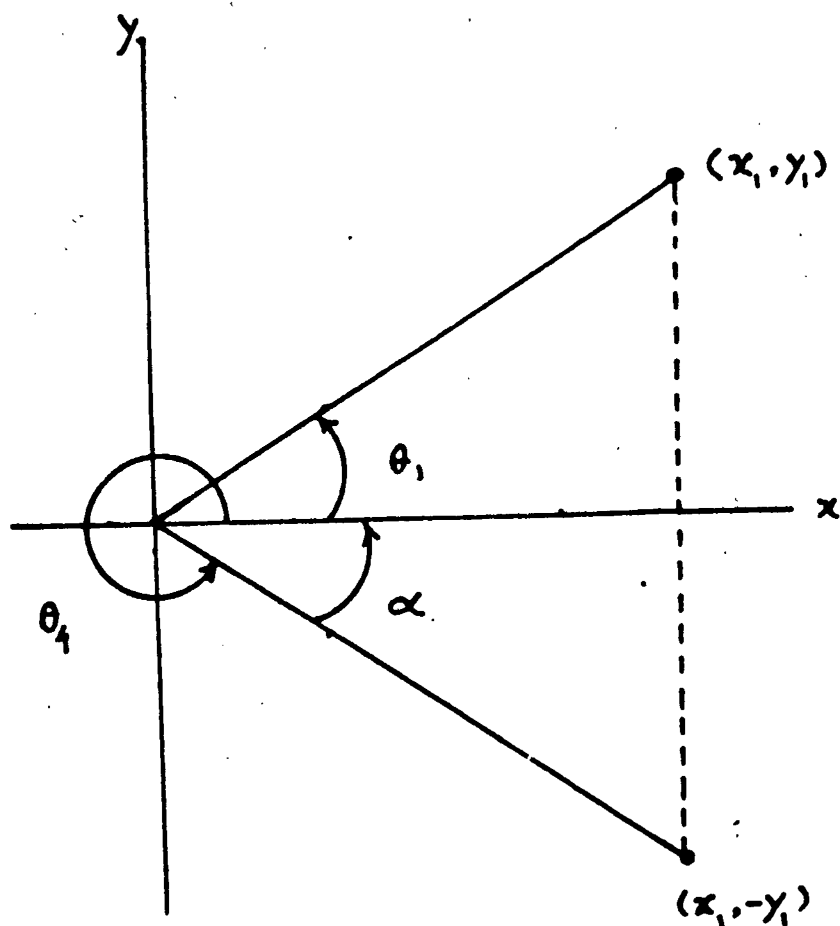
اگر سمت حرکت دورانی «نیم خط» از حالت اولی مخالف جهت حرکت عقرب ساعت باشد،این زاویه را به عنوان زاویهٔ «مثبت» یاد میکنند. واگر حرکت دورانی هم جهت عقرب ساعت باشد آن زاویه را منفی میگریند. (شکل ذیل را ملاحظه نمائید)

در شکل (۲_ ۱) ، زاویه $\hat{۱}$ مثبت و زاویه $\hat{۲}$ منفی میباشند.

$-\hat{2}$, $+\hat{1}$



شکل (۲-۱)



شکل (۳-۲)

مثال (ج) در شکل (۲-۲)، اگر $\hat{\theta}_3 = 210°$ باشد، توابع مثلثاتی ای زاویه مذکور با استفاده از فارمول (۴-۲) چنین محاسبه شده میتواند.

$$\sin 210° = -\sin(210° - 180°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2} = -0.5000$$
$$\cos 210° = -\cos 30° = -0.8660$$
$$\tan 210° = +0.5774 \qquad \cot 210° = +1.732$$
$$\sec 210° = -1.155 \qquad \csc 210° = -2.000$$

درینجا دیده میشود که زاویهء ماخذ عبارت است از $210° - 180° = 30°$، و ما میتوانیم قیمت توابع مثلثاتی ای ۲۱۰ درجه را از روی توابع ۳۰° تشریح نمائیم . اما در مورد علامه گذاری باید بسیار دقیق باشیم .

مثال (د) : در شکل (۳_۲)، اگر $\hat{\theta}_4 = 315^\circ$ باشد، توابع مثلثاتی با استفاده از معادلهٔ (۵_۲) چنین محاسبه میشوند:

$$\sin 315^\circ = -\sin(360^\circ - 315^\circ) = -\sin 45^\circ = -0.7071$$
$$\cos 315^\circ = +\cos 45^\circ = +0.7071$$
$$\tan 315^\circ = -1.000 \quad \cot 315^\circ = -1.000$$
$$\sec 315^\circ = +1.414 \quad \csc 315^\circ = -1.414$$

دراینجا دیده میشود که ← (45°) زاویهٔ مأخذ است .

مثال: با استفاده از فارمول های (۳_۲)، (٤_۲)، و (۵_۲) چنین خلاصه شده میتواند.

$$\sin 160^\circ = +\sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 20^\circ = 0.3420$$
$$\tan 110^\circ = -\tan(180^\circ - 110^\circ) = -\tan 70^\circ = -2.747$$
$$\cos 225^\circ = -\cos(225^\circ - 180^\circ) = -\cos 45^\circ = -0.7071$$
$$\cot 260^\circ = +\cot(260^\circ - 180^\circ) = \cot 80^\circ = 0.1763$$
$$\sec 304^\circ = +\sec(360^\circ - 304^\circ) = \sec 56^\circ = 1.788$$
$$\sin 357^\circ = -\sin(360^\circ - 357^\circ) = -\sin 3^\circ = -0.0523$$

با استفاده از فورمول های (۳_۲) تا (۵_۲)، ما میتوانیم که قیمت هریك تابع را پیدا کنیم به شرطیکه ضلع دوم زاویهٔ مورد نظر در یکی از ربع ها واقع گردد. این حالت دریافت کردن تابع زاویهٔ حاده را ساده میسازد. زاویهٔ که ضلع دوم آن بالای یکی از محورهای x و y واقع شوند، بنام زاویهٔ (Quadcrantal angle) یاد میشود. با استفاده از تعریف توابع و با درنظرداشت این که $r > 0$ باشد، جدول ذیل را ترتیب داده میتوانیم :

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0.000	1.000	0.000	undef.	1.000	undef.
90°	1.000	0.000	undef.	0.000	undef.	1.000
180°	0.000	-1.000	0.000	undef.	-1.000	undef.
270°	-1.000	0.000	undef.	0.000	undef.	-1.000
360°						

توابع زاویه 360° عین توابع زاویه 0° است .

.....undef. ⇒ ∞ لایتناهی

نوت : قیمت‌های جدول فوق با تحلیل های قیمت زاویه θ به در شکل (۴-۳) صدق میکند .

مثال اول : در شکل (a) ٤ـ٢ ،

$$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \therefore \sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0 \end{array}\right\} (a)$$

در شکل (b) (۴-۲) ؛

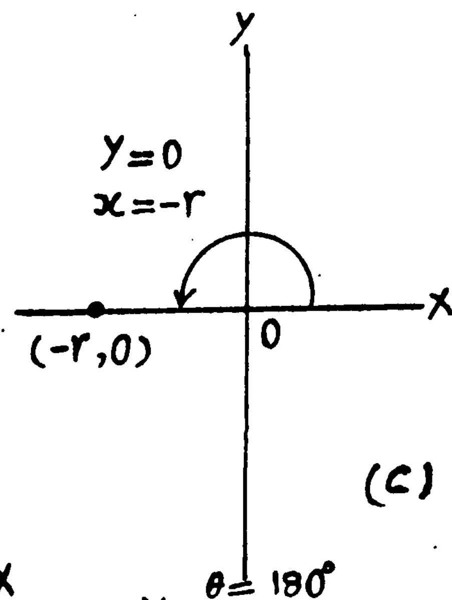
$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \frac{y}{x} \\ \therefore \tan 90^\circ = \frac{r}{0} = \infty \end{array}\right\} (b)$$

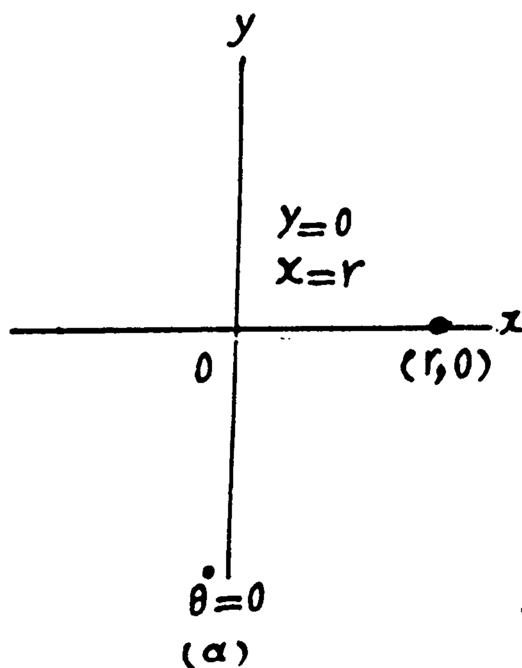
درشکل (c) (۴-۲) ،

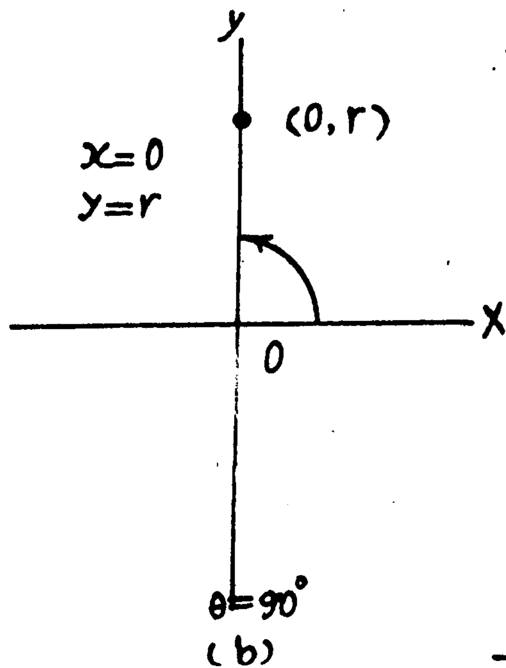
$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \therefore \cos 180^\circ = \frac{-r}{+r} = -1 \end{array}\right\} (c)$$

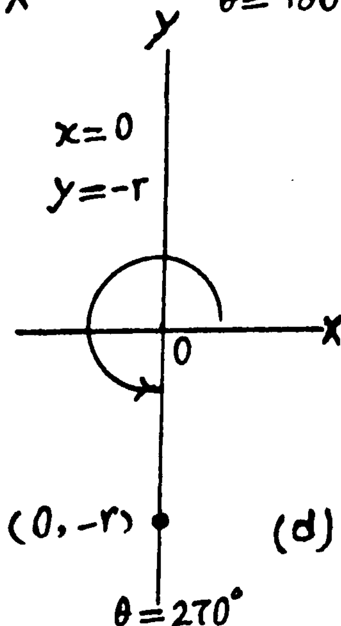
در شکل (d) (۴-۲) ،

$$\left.\begin{array}{l} \cot\theta = \frac{x}{y} \\ \therefore \cot 270^\circ = \frac{0}{-r} = 0 \end{array}\right\} (d)$$









شکل (۴-۲)

تمرین ۲ـ۳ :

۱ـ درتمرین های ۱ الی ۸ توابع مثلثاتی را به اساس زاویهء حاده مثبت تشریح کنید.

1. $\sin 160^\circ$, $\cos 220^\circ$ 2. $\tan 91^\circ$, $\sec 345^\circ$
3. $\tan 105^\circ$, $\csc 302^\circ$ 4. $\cos 190^\circ$, $\cot 290^\circ$
5. $\sin(-123^\circ)$, $\cot 174^\circ$ 6. $\sin 98^\circ$, $\sec(-315^\circ)$
7. $\cos 400^\circ$, $\tan(-400^\circ)$ 8. $\tan 920^\circ$, $\csc(-550^\circ)$

۲ـ در معادلهٔ ذیل قیمت F به پوند است ، از رابطهٔ ذیل آنرا دریافت کنید.

$$\frac{F}{\sin 115.0^\circ} = \frac{46.0}{\sin 35.0^\circ}$$

۳ـ ولتاژ برق را از معادله دریافت کنید.

$$V = 100 \cos 565.0^\circ$$

٤ـ مساحت مثلث که دو ضلع و زاویه بین اضلاع مذکور معلوم باشد،توسط فورمول ذیل محاسبه میگردد.

مثال : مساحت مثلث را دریافت کنید، درصورتیکه عناصرمعلوم چنین باشد:

$$a = 37.2 , \ b = 57.2$$
$$C = 157.0^\circ$$
$$A = \frac{1}{2} ab . \sin C.$$

٥ـ یك سرویر میخواهد که مساحت یك پارچه زمین مستطیل شکل را توسط فورمول سوال ٤ دریافت کنند، در صورتیکه، $a = 273m, b = 156m$, $\hat{C} = 112.5^\circ$ و زاویهٔ $\hat{C}$ مساوی 112.5° باشد . مساحت مطلوب را معلوم کنید؟

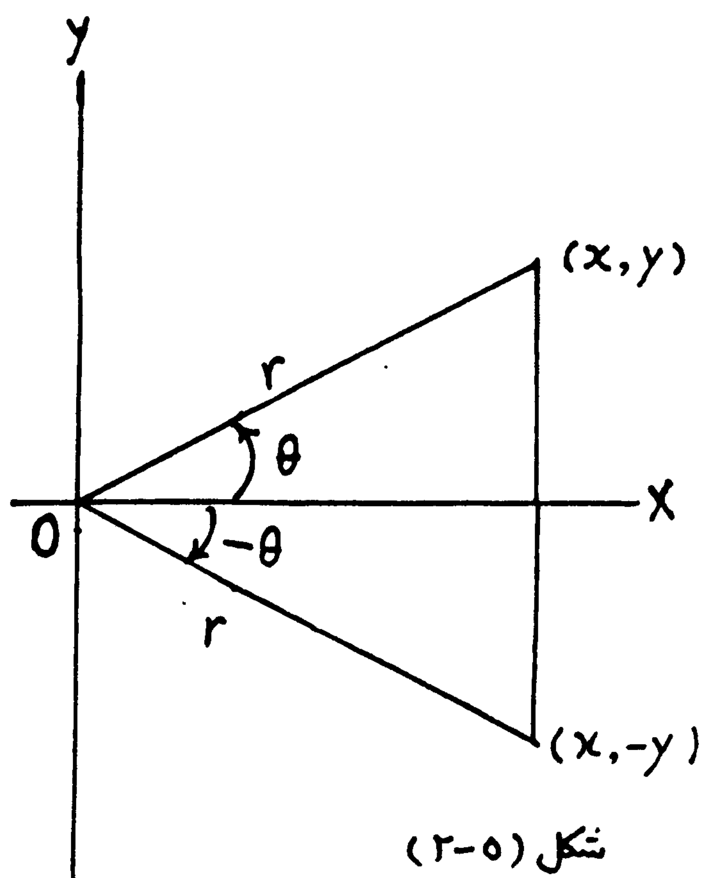
۶ــ از تمرین ۵۴ تا ۵۶ زاویائی منفی ارائه شده است . توابع مثلثاتی ای زاویه های مذکور را دریافت کنید.

54. (a) $\sin(-60^\circ)$ $\cos(-176^\circ)$

55. (a) $\tan(-100^\circ)$ $\cot(-215^\circ)$

56. (a) $\sec(-310^\circ)$ $\csc(-35^\circ)$

۷ــ درشکل (۵ــ۲) مشاهده میشودکه $\sin\hat{\theta} = \frac{y}{r}$ و $\sin(-\hat{\theta}) = -y/r$ است، و از طرف دیگر، میدانیم که $\sin(-\hat{\theta}) = -\sin\hat{\theta}$ است.به همین اساس شما روابط ذیل را مطالعه کنید که صحیح است ویا خیر؟



شکل (۵-۲)

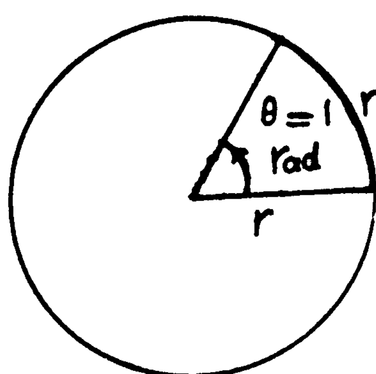
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$
$$\sec(-\theta) = \sec\theta \quad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

۴ــ۳ رادیان (Radian) :

جهت حل اکثریه پرابلم های که توابع مثلثاتی درآن بکار میرود ، نشان دادن زاویه به درجه کافی است ، اما در بعضی موضوعات فزیک ، زاویه به یك واحد دیگر نشان داده

میشود ،که عبارت است از :رادیان (Radian) . در دروس گذشته ، رادیان راکه واحد زاویه است،معرفی کردیم . اما آنرا تعریف نکردیم . یك رادیان (Radian) عبارت از زاویه ایست،که اگر راس آن در مرکز دایرهٔ موقعیت داشته، طول قوس مقابل زاویه مساوی به شعاع همان دایره باشد .

این مقدار زاویه را یك ریدین میگویند. شکل (۶-۲)



شکل (۶-۲)

از طرف دیگر:

میدانیم که محیط دایره از طریق شعاع توسط فرمول ذیل محاسبه میگردد.

(محیط دایره) $C=2\pi r$

نسبت محیط و شعاع دایره چنین است . یا $\frac{C}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi=6.28$

یا $C=(6.28)(r)$

از این تحلیل برمی آید که طول دورانی (محیط) یك دایره $C=(6.28)(r)$ است. یا (6.28 چند شعاع همان دایره)است .

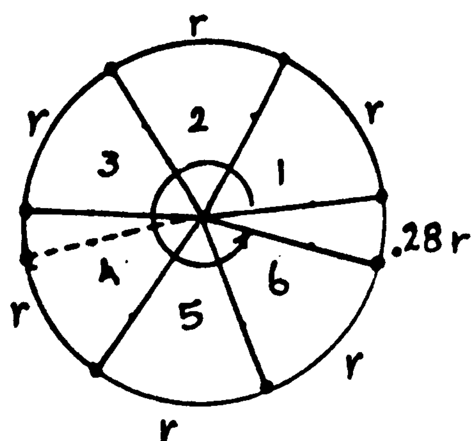
همچنان مشاهده میشود که، زاویه‌ء مرکزی‌ِدایره که ۳۶۰° درجه میباشد، به قدر ۲ (۶،۲۸) زاویه ریدین درآن موجود است . شکل (۷-۲)

$$2\pi\ rad. = 360^\circ$$

یا $\pi\ rad=180^\circ$ ....(۲-۷)

ازرابطهٔ فوق دریافت کرده میتوانیم:

$$1^\circ=\frac{\pi}{180^\circ}rad=0.01745\ rad ...(۲-۸)$$



شکل (۷-۳)

$$(6.28)\ rad. = 360^\circ$$

$$(2\pi)\ rad. = 360^\circ$$

همچنان

یا $\Rightarrow 1\ rad = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.30^\circ$ ...... (۹-۳)

از مساوات (۷_۳) تا به (۹_۳) چنین نتیجه میگیریم که :

۱_ اگر زاویه به درجه اندازه شده باشد، و بخواهیم آنرا به ریدن تبدیل کنیم ، پس مقدار درجه را به $\pi/180$ ضرب می نمائیم .

۲_ اگر زاویه به ریدن اندازه شده باشد، و آنرا بخواهیم به درجه تبدیل کنیم ، پس مقدار ریدین را به $180/\pi$ ضرب می نمائیم .

مثال - ۱ $\quad 18.0^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(18.0) = \frac{\pi}{10.0} = \frac{3.14}{10.0} = 0.314\ rad$

$$120^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(120) = \frac{6.28}{3.00} = 2.09\ rad$$

مثال - ۲ $\quad 0.400\ rad = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)(0.400) = \frac{72.0^\circ}{3.14} = 22.9^\circ$

$$2.00\ rad = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)(2.00) = \frac{360^\circ}{3.14} = 114.6^\circ$$

نظر به تعریف ریدین ، بسیار عام است که زاویهء ریدین را به حرف یونانی π نشان بدهیم زاویه های که به حرف π تشریح میشرد در مثال ذیل واضع گردیده است :

$$30^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(30^\circ) = \frac{\pi}{6}\ rad$$

$$45^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(45^\circ) = \frac{\pi}{4}\ rad$$

$$\frac{\pi}{2}\ rad = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = 90^\circ$$

$$\frac{3\pi}{4}\ rad = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 135^\circ$$

هرگاه زاویه واحد نداشته باشد ، نشان ده آنست که واحد زاویه ریدین میباشد.

مثال :

$$60.0^\circ = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right)(60.0^\circ) = \frac{\pi}{3.00} = 1.05$$

$$2.50 = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)(2.50) = \frac{450^\circ}{3.14} = 143^\circ$$

$$1.05 \downarrow 60.0^\circ \qquad 2.50 \downarrow 143^\circ$$

بعضی ماشین های کلکولیتر کلیدی داردکه با استفاده از آن میتوانیم زاویه که به درجه باشد ، آنرا مستقیماً به ریدین تبدیل نمایم، یا برعکس ریدین را بدرجه تبدیل نمود.

همچنان ما میتوانیم توابع مثلثاتی زاویه را که به ریدین نشان داده شده باشد ، توسط کلکولیتر دریافت نمائیم، بعضی کلکولیترها برای ریدین و درجه دکمهٔ جداگانه دارند ، اما بعضی ها "مود - درجه" و "مود - ریدین" دارند. اگر کلکولیتر به (مود) ریدین باشد توابع مثلثاتی ریدین را،و اگر به مود درجه باشد توابع مثلثاتی درجه را نشان میدهد.

مثال : میخواهیم Sin.4538 را توسط کلکولیتر دریافت کنیم .
Sin .4538

(۱) کلکولیتر را در مود ریدین اعیار بسازید.

بعداً عدد ۴۵۳۸. راجستر کرده ، دکمه SIN را فشار بدهید.

در کلکین چه عدد ۴۳۸۳۸۴۱. ظاهر میگردد که این مفهوم را دارد:

$$\sin 0.4538 = 0.4384$$

به همین ترتیب :

$$\tan 0.9977 = 1.550$$

و همچنان

$$\cos 1.074 = 0.4766$$

برای حالات خاص، یك زاویهٔ ماخذ به رادیان مورد نیاز است . و برای آنکه بدانیم زاویهٔ مورد نظر در کدام ربع قرار دارد ، روابط ذیل را باید بخاطر داشته باشیم .

$$\frac{1}{2}\pi = 90^\circ, \pi = 180^\circ, \frac{3}{2}\pi = 270^\circ, \quad 2\pi = 360^\circ,$$

روابط فوق برای زاویه های ربعی در جدول ذیل خلاصه شده است :

زاویه های ربعی ی (١-٦) جدول

درجه Degrees	رادین Radians	Radians (Decimal) ← اعشاری
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1.571
180°	π	3.142
270°	$\frac{3}{2}\pi$	4.712
360°	2π	6.283

مثال : زاویه ٣/٤٠٢ [1] کلانتر از ٣/١٤٢ و کمتر از ٤،٧١٢ میباشد.

به این معنی که زاویه در ربع سوم موقعیت دارد، و زاویهٔ ماخذ آن عبارت است از :

$$3.402-\pi=0.260$$

لهذا از کلید $\boxed{\pi}$ باید استفاده نمود.

زاویه ٥/٢١٠ بین ٤/٧١٢ و ٦/٢٨٣ واقع است ، به این معنی که زاویهٔ ٥/٢١٠ در ربع چارم موقعیت داشته و زاویهٔ ماخذ آن :

$$٢\pi - ٥/٢١٠ = ١/٠٧٣$$

١/٠٧٣ رادیان است .

مثال دوم :

زاویه $\hat{\theta}$ را به ریدین دریافت کنید-درصورتیکه: $0<\hat{\theta}<2\pi$ و $\cos\hat{\theta}=0.8829$ باشد.

ما $\hat{\theta}$ را به ریدین برای قیمت معینه $\cos\hat{\theta}$ دریافت میکنیم .

چون قیمت $\hat{\theta}$ محدود است بین o و 2π پس ما باید زاویه مذکور را در ربع اول و ربع چارم جستجو نمائیم، زیرا $\cos\hat{\theta}$ در ربع اول و چارم مثبت است .

در کلکولیتر ٨٨٢٩ . را راجستر نمائید و بعداً دکمهٔ $\boxed{ARCCOS}$ را فشار بدهید.

یا ($\cos^{-1}$) .

$$\cos 0.4888 = 0.8829$$

در ربع چارم :

$$\therefore \cos(2\pi - 0.4888) = \cos 5.794$$

(١) علامه / . عشاریه را نشان میدهد.

زاویه به سمبول های مختلف نشان داده میشوند ، اما مشهورترین آنها حروف الفبا یونانی : تیتا (θ)، فی (Φ) ، الفاء (α)، بیتا (β) میباشند. زاویه به حروف کلان لاتین نیز نشان داده میشود، مانند: $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، و $\hat{C}$.

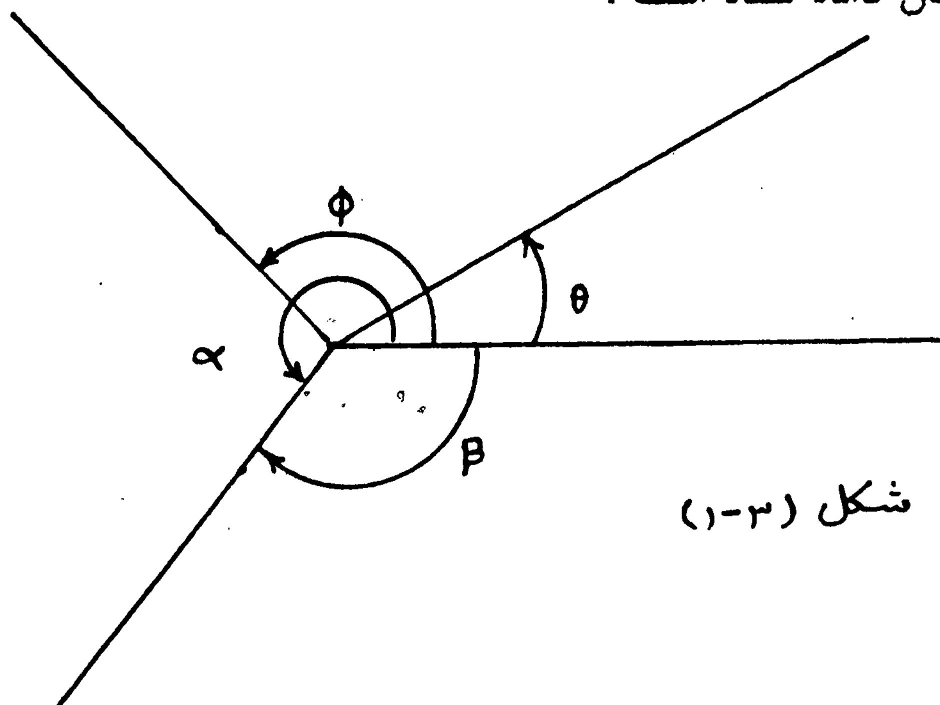
واحدات زاویه : ⟵ زاویه عموماً به دو واحد ـ درجه (degree) و رادین (Radian) اندازه گیری میشود. ما فعلاً درین فصل از واحد «درجه» استفاده میکنیم، اما چون هردو واحد در کلکولیترها، و کمپیوتر ها استعمال میشوند، لهذا لازم است تا رابطه های بین این دو واحد زاویه را بدانیم .

درجه عبارت است از : $\frac{1}{360}$ حصهٔ یك دور مکمل **به اطراف یك نقطه .**

درجه با سمبول (°) نشان داده میشود.

مثال : زاویه های $\theta = 30°$ ، $\Phi = 140°$ ، $\alpha = 240°$ ، و $\beta = -120°$

که: درشکل (۳ـ۱) نشان داده شده است .



شکل (۳-۱)

برای تعین اجزای درجه، یك طریقه تقسیم این واحد به اعشاری میباشد. چنانچه اکثراً ، کلکولترها زاویه را به قسم اعشاری استعمال میکنند. طریقهٔ دیگر، آنست که واحد مذکور به دقیقه و ثانیه تقسیمات گردیده . دقیقه به علامهٔ (′) وثانیه به علامهٔ (″) نشان داده میشود.

$\theta = 0.4888$ یا $\Rightarrow \theta = 5.794$

اگر ما نوشته کنیم که :

$\sin 1 = ?$ ....(اول)

$\sin \theta = 1$ ....(دوم)

در اینجا مشابهتی به نظر میرسد که موضوع را مبهم میسازد.

در معادله، اول $\sin 57.30^\circ$ مطلوب است، زیرا یك ریدین مساوی به 57.30° درجه میشود.

و در معادله، دوم زاویه مطلوب است ، که Sin آن (۱) باشد یعنی $\hat{\theta} = 90^\circ$ زیــرا $\sin 90^\circ = 1$ است .

پس - $\theta = \frac{\pi}{2}$ یا $\theta = 90^\circ$

مثال ذیل موضوع را خوبتر واضح میسازد :

مثال : توسط کالکولیتر : چون $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 0.6050 = 0.5688 \dashrightarrow 0.6050 = 34.66^\circ$

$\tan\theta = 1.709 \dashrightarrow \theta = 59.67^\circ$

$\therefore 59.67^\circ = 1.041, \dashrightarrow \tan 1.041 = 1.709$

تمرین کلکولیتر :

از تمرین ۳۲ تا به ٤٠ توابع مثلثاتی ای مطلوب را طوری دریافت نمائید ، که نخست زاویه ها به درجه تبدیل شود.

از تمرین ٤٩ تا به ٥٦ زاویهٔ $\hat{\theta}$ را دریافت کنید . درصورتیکه $0 \leq \theta < 2\pi$ (صفحه ٦١)

33. $\sin\frac{\pi}{4}$, 34. $\cos\frac{\pi}{6}$, 35. $\tan\frac{5\pi}{12}$

36. $\sin\frac{7\pi}{18}$, 37. $\cos\frac{5\pi}{6}$, 38. $\tan\frac{4\pi}{3}$,

39. $\sec 4.592$ 40. $\cot 3.273$

49. $\sin\theta = 0.3090$ 50. $\cos\theta = 0.9135$ 51. $\tan\theta = -0.2126$
52. $\sin\theta = -0.0436$ 53. $\cos\theta = 0.6742$ 54. $\tan\theta = 1.860$
55. $\sec\theta = -1.307$ 56. $\csc\theta = 3.940$

۱ـ اگر $\tan\alpha = \alpha$ باشد، شما ثبوت کنید که حل این معادله عبارت است از :

$$\alpha = 1.43\pi$$

۲ـ ولتاژ لحظوی یك سیستم برق 120V و 60Hz با معادله $V = 170 \sin 377t$ نشان داده میشود ← t از قرار ثانیه وقت است که جنریتور چالان میشود.

ولتاژ لحظوی را بعداً از ۰/۰۰۱ ثانیه و ۰/۰۱۰ ثانیه معلوم کنید؟

۳ـ از فرمول ذیل قیمت V را دریافت نمائید که :

$$V = A\sqrt{\frac{K}{m}}\cos\sqrt{\frac{K}{m}}\,t$$ (سرعت عصا بوسیلهٔ فنریت)

$t = 0.100\ sec$, $m = 36.0\ gr.$

$K = 400\ gr/sec^2$, $A = 5.00\ Cm.$

تمرین ۳ـ۲ .

از تمرین ۱ الی ۸ زاویه های ارائه شده را به ریدین از طریق π دریافت کنید.

1. $15°, 150°$ 2. $12°, 225°$ 3. $75°, 330°$ 4. $36°, 315°$
5. $210°, 270°$ 6. $240°, 300$ 7. $160°, 260°$ 8. $66°, 350°$

از تمرین ۹ الی ۱۶ زاویه های ارائه شده را به درجه تبدیل نمائید.

9. $\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}$ 10. $\frac{3\pi}{10}, \frac{5\pi}{6}$ 11. $\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{4}$ 12. $\frac{7\pi}{15}, \frac{4\pi}{3}$

13. $\frac{17\pi}{18}, \frac{5\pi}{3}$ 14. $\frac{11\pi}{36}, \frac{5\pi}{4}$ 15. $\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{20}$ 16. $\frac{7\pi}{30}, \frac{4\pi}{15}$

از تمرین ۱۷ الی ۲۴، زاویه های ارائه شده را به ریدین تبدیل کنید.

17. 23.0° 18. 54.3° 19. 252.0° 20. 104.0°
21. 333.5° 22. 168.7° 23. 178.5° 24. 86.1°

از تمرین ۲۵ الی ۳۲، زاویه های ارائه شده را به درجه تبدیل کنید.

25. 0.750 26. 0.240 27. 3.00 28. 1.70
29. 2.45 30. 34.4 31. 16.4 32. 100

موارد کاربرد زاویه که به رادیان اندازه میشود

پیمایش زاویه به واحد ریدین در ریاضی و تکنالوژی بسیار عملی بوده، ودر حل پرابلم های مربوط، سهولت زیاد را فراهم میسازد. درین مرحله، کاربرد زاویه های ریدین را مطالعه می نمائیم :

نظر به تعریف ریدین ، طول قوس که مقابل یك ریدین موقعیت دارد مساوی است به طول شعاع همان دایره . اگر طول قوس(S) باشد ، میتوانیم بنویسیم $S=2\pi r$ برای دایرهٔ مکمل . چون (2π) زاویهٔ مرکزی ای دایره به ریدین است برای دایرهٔ مکمل ، پس طول قوس را چنین افاده کرده میتوانیم : $S=\theta r$ ، s طول قوس مقابل زاویه θ ، r شعاع دایره

θ زاویهٔ مرکزی برای هریك قوس دایره است . البته درصورتیکه θ به ریدین اندازه شود.

مثال : اگر $r=3.00$ in., $\theta=\pi/6$ ، شکل (۳-۸) (a)

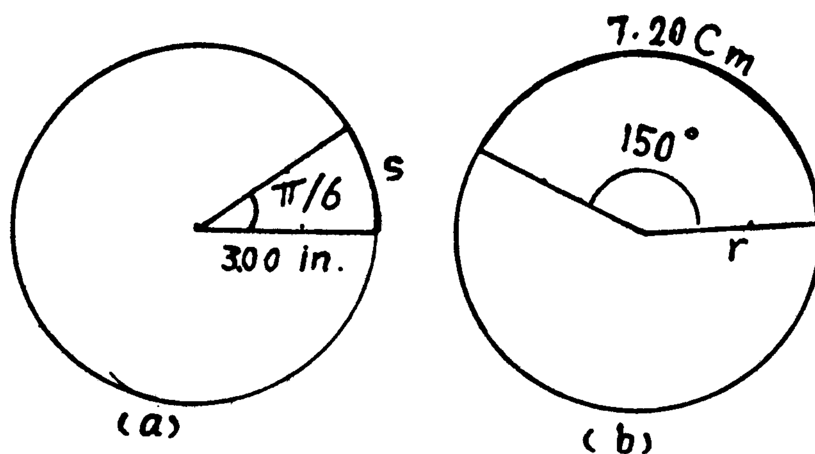
پس - $s=\left(\frac{\pi}{6}\right)(3.00)=\frac{\pi}{200}=1.57$ in.

۳ - اگر طول قوس 7.20 سانتي و زاويهء مرکزی 150° باشد ، میتوانیم شعاع این دایره را چنین محاسبه نمائیم . شکل (۳ - ۸) b .

برای حل این مثال از $S=r\theta$ کار میگیریم .

که : $r=\frac{S}{\theta}$

$$r=\frac{7.20}{150\left(\frac{\pi}{180}\right)}=\frac{(7.20)(180)}{150\pi}=2.75\ \text{Cm}.$$



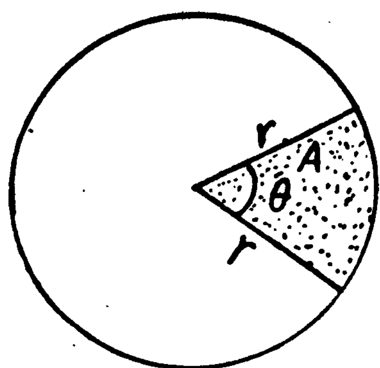
شکل a و b (۲-۸)

کاربرد ریدین در هندسه :

مساحت سیکتور (Sector) یك دایره به شکل (۹-۲) صرف میتوانیم از طریق ریدین دریافت کرد.

فارمول مساحت دایره عبارت است از : . . . . $A=\pi r^2$

میشود آنرا چنین نوشت : $A=\frac{1}{2}(2\pi)r^2$



شکل (۹-۲)

و میدانیم که زاویه مرکزی ای کامل دایره 2π است .

پس مساحت سیکتر (Sector) هریك زاویه عبارت است از:

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\theta r^2} \quad \text{.....(۲-۱۱)}$$

که واحد θ ریدین است

مثال : مساحت سیکتور یکدایره راکه زاویه مرکزی ای آن °۲/۸ و شعاع آن ″۵/۲۵ باشد، چنین محاسبه میشود : شکل (۱۰-۲)

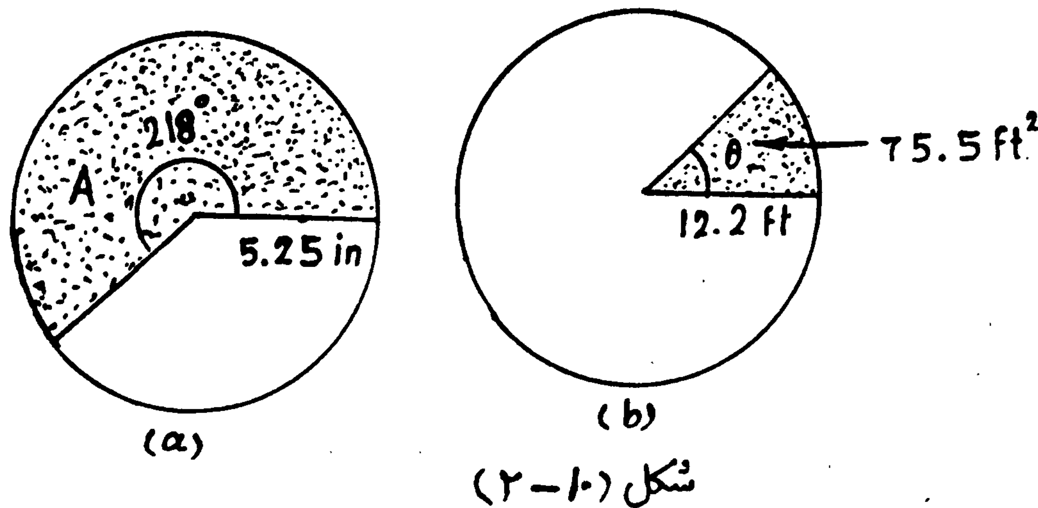
$$A=\frac{1}{2}\theta r^2$$

$$A=\frac{1}{2}(218)\left(\frac{\pi}{180}\right)(5.25)^2=52.4 \text{ in}^2 \Leftarrow \text{شکل (۱۰-۲)(a)}$$

مساحت سیکتور یکدایره ۷۵/۵ فت مربع ، و شعاع دایره ۱۲/۲ فت میباشد زاویهٔ مرکزی ای آنرا دریافت نمائید.

$$\theta = \frac{2A}{r^2}$$
$$= \frac{2(75.5)}{(12.2)^2} = 1.01$$

θ قیمت $= 1.01\ rad$, ٪ $57.9^\circ \Rightarrow b$ شکل (۱۰-۲)



شکل (۱۰-۲)

نوت : بخاطر باید داشت ، این فورمول ها وقتی صدق میکند که $\hat{\theta}$ به ریدین اندازه شود.

مورد دیگر کاربرد رادیان در محاسبهٔ سرعت است . ما میدانیم که سرعت اوسط (V) از رابطهٔ ذیل محاسبه میشود:

$$V = \frac{S}{t}$$

دراینجا (V) سرعت اوسط ، (S) فاصله ، (t) وقت است . اگر یك جسم به سرعت V در مسیر دایروی حرکت میکند. فاصلهٔ را که جسم طی خواهد کرد، عبارت از محیط دایره میباشد.

در معادلهٔ ـ $S = r\theta$ ،

$S \Rightarrow$ طول قوس مقابل زاویهٔ θ

$r \Rightarrow$ شعاع دایره

θ به واحد "ریدین"

زاویهٔ مرکزیٔ دایره به ریدین <= θ

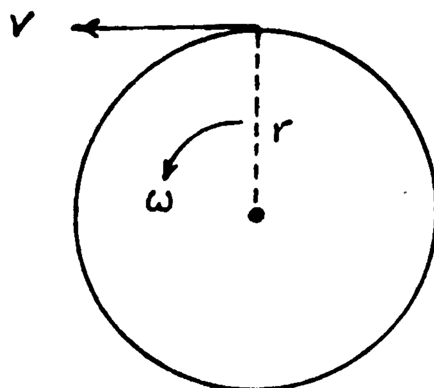
هردو طرف معادله را به t تقسیم میکنیم : $S = \theta r$

$$\frac{S}{t} = \frac{\theta}{t} r$$

$$V = \omega r \qquad \text{......} \ (٢-١٢) \ *$$

معادلهٔ (١٢ـ٢) رابطه بین سرعت خطی (v) و سرعت زاویه وی (ω) را نشان میدهد که یك جسم بدور دایره دارای شعاع (r) حرکت میکند. شکل-(١١ـ٢).در این شکل وکتور سرعت، (v) مماس است به دایره، سمت، (v) طور متداوم به یك مقدار معین تغیّر می نماید.

سرعت زاویوی (ω) عبارت از ریدین فی واحد زمان است که در عمل دور فی دقیقه قبول میشود.



شکل (١١ـ ٢)

درهمچو مسایل باید قبل از اینکه از فارمول (١٢ـ٢) استفاده نمائیم ، (ω) را به ریدین تبدیل می کنیم .

مثال : یك جسم به حرکت دایروی (0.125 rad/sec) بالای مسیر دایروی حرکت می کند که شعاع دایرهٔ مذکور (90m) است . سرعت جسم را دریافت نمائید؟

$$V = \omega r$$
$$V = (0.125)(90.0) = 11.3 m/s$$

مثال دوم : یك عدد چرخ (فلای ویل) به سرعت دایروی ٢٠ دور فی دقیقه حرکت

$*\ \omega \Rightarrow$ سرعت زاویوی

میکند. اگر شعاع این چرخ ″۱۸ باشد، سرعت خطی یك نقطه بالای کنار (چرخ) را دریافت کنید.

میدانیم که درهریك دوران مکمل $2\pi\ rad$ موجود میباشد.

$\omega = 20.0\ r/min = 40.0\pi\ rad/min$

$V = \omega r$

لهذا ∴ $V = (40.0\pi)(18.0) = 2260\ in./min$

مفهوم فوق اینست که سرعت خطی ای نقطهء مذکور عبارت است از :

2260 in./min

188 ft/ min → 3.14 ft/s.

مثال :

تسمه (belt) یك پُلی ۱۰/۰ فت طول دارد. و پُلی در ظرف دوثانیه یك دور مکمل را تکمیل می نماید. اگر شعاع پَلی ۶/۰۰ انچ باشد. سرعت زاویه وی (ادور فی دقیقه) یك نقطه بالای کنار پولی را معلوم کنید؟

حل : چون سرعت خطی نقطه در کنار پلی مساوی است به سرعت تسمه ، لهذا :

$V = 10.0 / 2.0 = 5\ ft/sec.$

شعاع پولی $r = 6.00 = 0.5$

با استفاده از معادلهء (۱۲-۲) .... $V = \omega r$

$5.00 = \omega(0.500)$

$\omega = 10.0\ rad/s$

$= 600\ rad/min$

$= 95.5\ r/min$

$10.0\ \frac{rad}{s} \times 60\ \frac{s}{min} = 600\ \frac{rad}{min}$,

$\frac{600\ rad/min}{2\pi\ rad/r} = 600\ \frac{rad}{min} \times \frac{1}{2\pi}\ \frac{r}{rad} = \frac{600 r}{2\pi\ min}$

$= 95.5\ r/min.$

مثال : جریان لحظوی دریك سرکت برق متناوب با معادلهء ذیل ارائه میشود :
جریان مذکور را تحت این شرایط معلوم کنید؟

(جریان لحظوی) $i = I \sin 120 \pi t,$
(جریان اعظمی) $I = 0.0685 A,$ $t = 0.00500 \; sec.$

$$i = 0.0685 (\sin 120^{\circ}) \pi (.00500) = 0.0651 A.$$

تمرین (۴-۳) :

پرابلم های مربوط به تمرین های(۱ الی ۳۳)را حل کنید.

۱ـ شعاع یك دایره (۱۰) است ، طول قوسی را که در مقابل زاویهء مرکزی (۹۰°) تشکیل میشود ، دریافت نمائید؟

۲ـ قطر یکدایره(٤/٥٠)فت است ، طول قوسی را که در مقابل زاویهء مرکزی(٤٢°) تشکیل میشود دریافت کنید؟

۳ـ مساحت سیکتور را که در پرابلم های (۱) و (۲) تشکیل میشود دریافت کنید؟

٤ـ مساحت سیکتور یك دایره را که در مقابل زاویهء مرکزی ای (۱۲۰°) تشکیل میشود ، درصورتی دریافت کنید ، که قطر این دایره 56/.cm باشد.

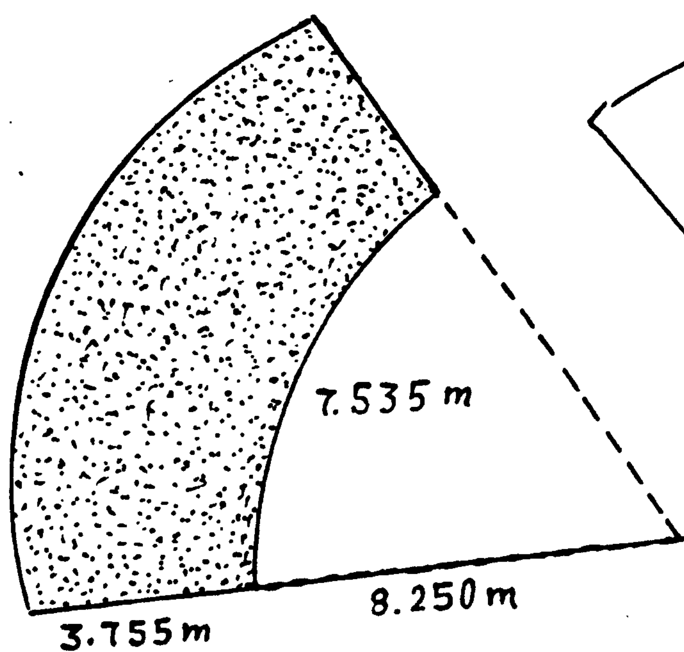
٥ـ یك حصه پایپ لین غاز طبیعی که طول آن(۳/۲٥)کیلو متر است، قوس یك دایره را تشکیل میدهد. اگر شعاع این دایره(۸/٥٠)کیلومتر باشد ، زاویهء مرکزی ای دایرهء مذکور را دریافت کنید؟

٦ـ شکل (۱۲ـ۲)"کیم شافت" سیکتور یك دایره است ، محیط آنرا دریافت نمائید؟

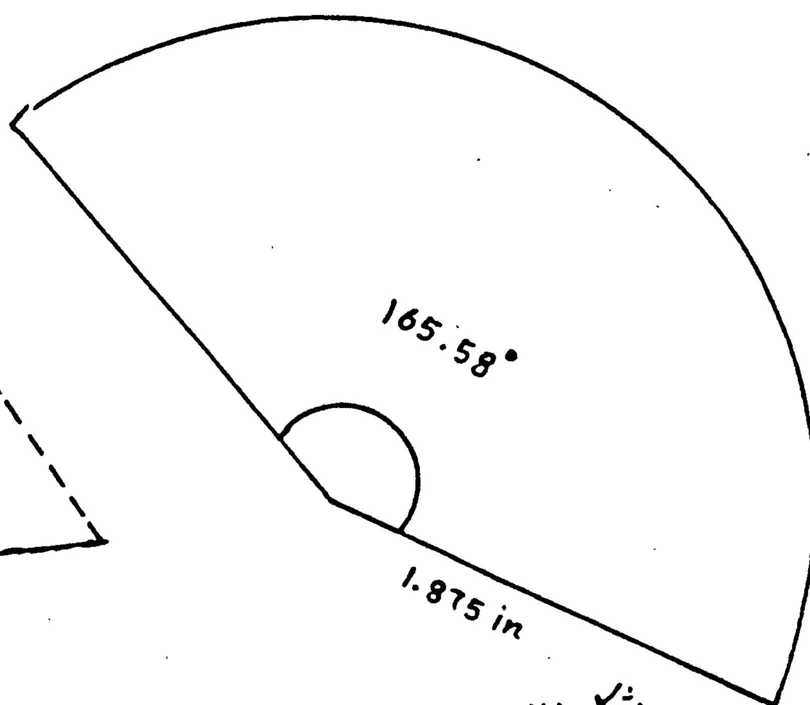
۷ـ یك آب پاش به فاصلهء (٦٥)فت دورتر آب را در چمن پاش میدهد. اگر این آب پاش به زاویهٔ (۱۱٥°)درجه دوران کند ، معلوم کنید ، که آب پاش مذکور چقدرمساحت را آبیاری کرده میتواند.

۸ـ یك روشنی انداز به زاویهء افقی ای(۷٥°) یك منطقه را روشن می سازد ، اگر روشنی به اندازهء (۲٥۰)فت دورتر بتابد، مساحت را که این چراغ روشن می نمایند ، دریافت کنید؟

۹ـ رولر پرنیتر یك کمپیوتر (در یك دقیقه(۲۰۰۰) دور را تکمیل می نماید، سرعت زاویوی ای این رولر را دریافت کنید؟



شکل (۱۳-۲)



شکل (۱۲-۲)

۱۰ـ مساحت یك پیاده رو را که در شکل (۱۳-۲) نشان داده، دریافت کنید؟ قوس بیرونی و درونی آن دایروی است.

۱۱ـ طول بازوی یك (برف پاك) موتر(″۱۲/۷۵) است، و به وسط پل برف پاك که طول آن(″۱۵) است قایم گردیده. (فرض کنید که بازو و پل برف پاك به یك خط مستقیم قرار دارند، برف پاك به چه اندازه مساحت را پاك خواهد کرد، اگر حرکت این برف پاك(°۱۱۰) قوس را احتوا نماید؟

۱۲ـ یك رقاص (Pendulum) که طول آن(′۳) است زاویه(°۵) درجه نوسان میکند. طول قوس را دریافت کنید، که بین آخرین نقاط نوسان تشکیل میشود.

۱۳ـ شعاع کرهء زمین در حدود (۳۹۶۰) میل است. طول قوس را دریافت کنید، که به زاویه مرکزی (°۱) درجه در خط استواء تشکیل میشود.

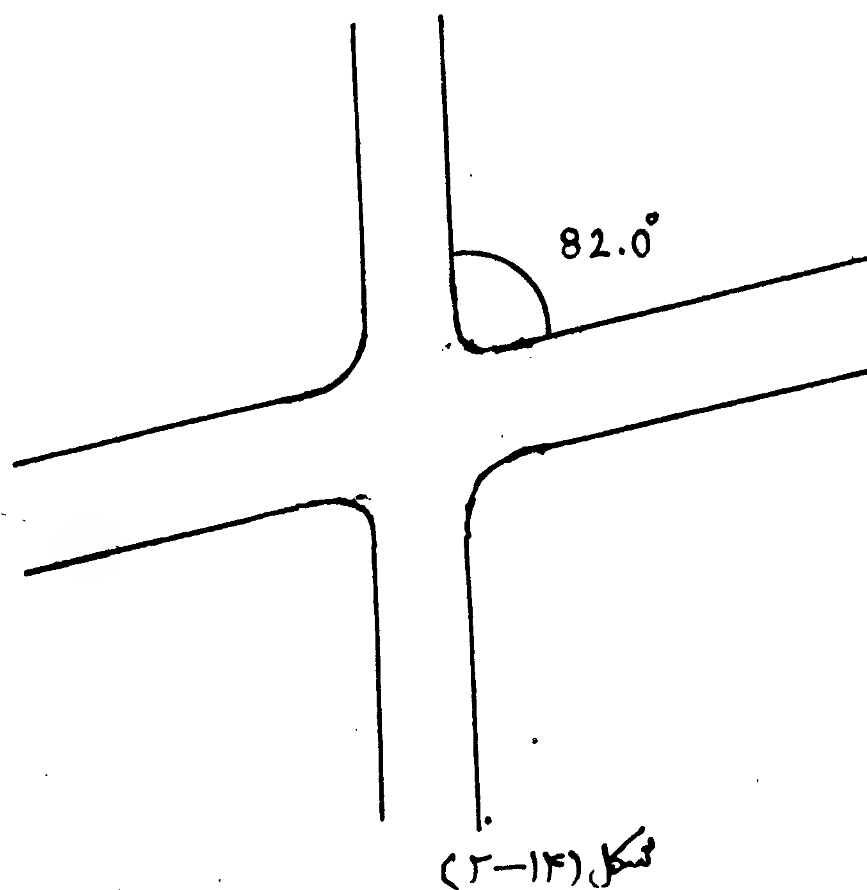
۱٤ـ یك طیاره به سرعت (٥٤٠) کیلومتر فی ساعت در مسیر دایروی برای (′۲) دقیقه پرواز میکند، شعاع این دایره را دریافت کنید در صورتیکه قوس طی شدهء زاویهٔ مرکزی(°۸) را تشکیل دهد؟

١٥ـ عقربهٔ يك امپير ميتر به زاويهٔ (°٥٤) انحراف مى نمايد ، و شدت جريان برق (٠/٢٥) امپير است . اگر طول عقربهء آله (″٢/٧٥) و شكل دايروى در امپير بكار رفته باشد. زاويهٔ انحراف را براى جريان اعظمى (١/٥ امپير) دريافت كنيد ؟

١٦ـ يك چرخ به سرعت (٣٠٠) دور فى ساعت حركت ميكند ، اگر شعاع چرخ (٦) سانتى متر باشد . يك نقطه بالاى كنار چرخ چقدر فاصله را در ظرف (′٣٠) ثانيه طى خواهد كرد ؟

١٧ـ پره هاى چرخ موتور يك كشتى به سرعت (١٢٠) ريدين در فى ثانيه حركت ميكند. سرعت خطى اى يك نقطه بالاى پره چند خواهد بود. در صورتيكه طول اين پره (٢٢/٥) سانتى متر باشد ؟

١٨ـ يك چارراهى اى دو سركه زاويهء (°٨٢) ملاقى ميشود ، طول قوس را به فاصلهٔ (١٥) فت دورتر از مركز دايره دريافت كنيد. شكل (١٤ـ٢)



شكل (١٤ـ٢)

١٩ـ يك موتر به سرعت (٦٠) ميل فى ساعت حركت ميكند ، (٨٨ فت فى ثانيه) قطر تاير هاى موتر (″٢٤/٥) است ، سرعت زاويه وى ايتايرهارا به ريدين فى ثانيه دريافت كنيد.

٢٠ـ فضا نوردى در كشتى اى فضائى به دور مهتاب يك دوران را در (١/٩٥) ساعت تكميل ميكند. ارتفاع فضا نورد ثابت بوده (٧٠) ميل ميباشد.

دقیقه ⟵ .... $1^{\circ} = 60'$ } تقسیمات درجه (اجزأ درجه)
ثانیه ⟵ .... $1' = 60''$

در شکل (۳_۱) مشاهده میشود که اضلاع اولی، و دومی زاویه های (α)، و (β) یکی میباشند، واین دو زاویه را بنام (Coterminal Angles) «کوترمینل» یاد میکنند. شناخت و تشخیص زاویه های «کوترمینل» برای مفهوم های بعدی ای مثلثات مهم است .

مثال :

قیمت های دو زاویه را که با زاویهٔ 145.6° کوترمینل باشند، دریافت کنید؟

حل : چون دریك دوران مکمل، 360° «درجه» است،زاویهء کلانتر از 360° درجه ، عبارت است از: $360^{\circ} + 145.6^{\circ} = 505.6^{\circ}$

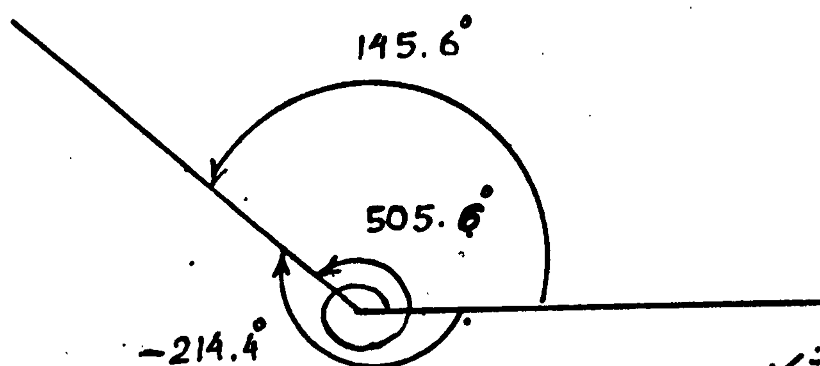
زاویهٔ دوم عبارت است از : $360^{\circ} - 145.6^{\circ} = 214.6^{\circ}$

این زاویه وقتی کوترمینل زاویهٔ 145.6° شده میتواند که آنرا علامهء منفی بدهیم .

∴ دو زاویهٔ که کوترمینل زاویهء 145.6° باشند، عبارت اند از:

(الف) 505.6° ، (ب) -214.4°

یا به عباره دیگر: زاویه های 145.6°، 505.6° و 214.4° _ باهم کوترمینل اند .



شکل (۴_۱)

هنگامیکه ، کلکولیتر یا کمپیوتر را در محاسبات ریاضی بکار میبریم ، لازم می افتد که ریدیان (Radian) را به درجهٔ و درجه را به ریدیان تبدیل کرده بتوانیم :

به این منظور، ما از رابطهٔ که یك ریدین تقریبا مساوی است به 57.30° درجه ،

سرعت ری را در یافت نمائید ؟ شعاع مهتاب (۱۰۸۰)میل میباشد .

۲۱_ در یك دایره، ترافیکی ، موتری $\frac{1}{3}$ حصه، محیط دایره را طی نموده است، که عبارت است از (0.125km.)شعاع این دایره، ترافیکی را معلوم کنید.

۲۲_ در اهتزاز یك سپرینگ ، فاصله، پیشرفت اهتزاز به (y) نشان داده شده است، که (y=۲/۵۵۰ Cos ۲/۵۸۰t)است .

t وقت است به ثانیه، قیمت (y) را درصورتیکه معلوم کنید ،که(t= ۱/۵۷۵)ثانیه ، باشد.

۲۳_ ولتاژ در زمان(t)دریك سرکت برقی چنین ارائه میگردد.

$$V=120 \cos 30\pi t$$

(V) را دریافت کنید ، درصورتیکه(t= ۰/۰۱۲۵)ثانیه باشد .

۲٤_ آرمیچر یك داینمو به قطر(۱/۳۸)فت است،و (۱۲۰۰) دوران را فی دقیقه تکمیل می نماید. سرعت خطی یك نقطه بالای آرمیچر چند خواهد بود.

۲۵_ مهتاب(۲٤۰۰۰۰)میل از زمین فاصله دارد ،و تقریباً درظرف(۲٤)روز یك دوران مکمل را به اطراف زمین تکمیل می نماید ، پس سرعت زاویه وی، مهتاب را بدور زمین به ریدین فی ثانیه دریافت کنید؟

۲٦_ یك سکتور دایره که زاویه، مرکزی آن (°۲۱۰/۷۵)میباشد از یك ورق فلزی ای دایروی که قطر آن(۱۲/۲۵)سانتی متر است، قطع شده ، و از این سکتور یك مخروط ساخته میشود.

شما مساحت جانبی مخروط مذکور را دریافت کنید؟

۲۷_ یك توربین جنریتور «بادی» به ظرفیت(1500kw)است ، این توربین دریك دقیقه (٤۰) دوران را تکمیل می نماید. سرعت خطی ای یك نقطه بالای پره، این توربین چند خواهد بود، در صورتیکه طول پره از مرکز توربین(۱۰۰)فت باشد.

۲۸_ قطر پروانه، یك طیاره(۰/٤٤)متر بوده، دریك دقیقه(۲۲۰۰)دوران را تکمیل می نماید، سرعت خطی یك نقطه بالای انجام پروانه را دریافت نمائید.

۲۹_ یك خیمه به شکل مخروطی از یك پارچه، دایروی ساخته میشود ، اگر قطر این

دایره (۱۵) فت، و زاویه ای مرکزی سکتور قطع شده 20° درجه باشد، مساحت پارچهٔ را که در ساختن خیمه مصرف شده معلوم کنید.

۲۰ ولتاژ دریك سرکت برق (AC) به فورمول ذیل نشان داده شده است :

$$v = V\cos 25t$$

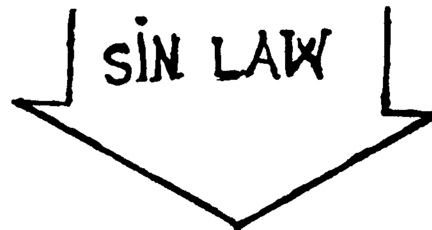
(V) ولتاژ اعظمی و (t) وقت است به ثانیه .

$V = 150\,V$ $\quad t = 0.1\,sec$, v را معلوم کنید.

۲۱ـ دوعدد پلی بالترتیب دارای شعاع ("۱۰) و ("۶) و مرکز آنها به اندازهٔ (۲۰) انچ از همدیگر دور واقع است . اگر تسمهء مشترك آنها مطابق علامهء (X) وصل شده باشد، طول تسمه را دریافت کنید .

۳۲ـ یك عدد قیف از پارچهء دایروی که قطر آن ("۱۰) است ساخته شده، و ازین پارچهٔ دایروی دو پارچه دیگر نیز قطع شده است . که یکی به شکل دایره که شعاع آن یك انچ است از حصهٔ مرکزی ای پارچهٔ اصلی. دیگرش به شکل سکتور است. به زاویهء مرکزی (200°) مساحت سطحی ای قیف را دریافت کنید.

مثلث های کیفی (قانون ساین)



از دروس گذشته تا الحال بحث ما صرف پیرامون حل مثلث های قایم الزاویه بوده است، اما در عمل ضرورت می افتد، تامثلث های را حل نمایم که زاویهٔ قایمه نمیداشته باشند.

که چنین مثلث هارا بنام مثلث های کیفی (Oblique.) یا غیر قایم یاد میشوند.

حال میخواهم حل مثلث های کیفی را تحت مطالعه قرار بدهیم .

در بخش های گذشته ما دانستیم که حل یك مثلث وقتی امکان پذیر است که سه عنصر آن را بدانیم به شرط آنکه یکی از آن ضلع مثلث باشد. بادرنظرداشت همین مطلب برای حل یك مثلث ، تمام شرایط را درچار حالت خلاصه مینمائیم تحت شرایط ذیل میتوانیم یك مثلث را حل نمانیم .

حالت اول : دو زاویه و یك ضلع معلوم باشد.

حالت دوم : دو ضلع و یك زاویهٔ مقابل ضلع معلوم باشد.

حالت سوم : دو ضلع و یك زاویه‌ء مابین دو ضلع معلوم باشد.

حالت چارم : سه ضلع معلوم باشند.

اگر چه چندین طریقه موجود است، که به کمك آن ما میتوانیم مثلث های کیفی راحل نمائیم، ولی دراینجا ما توجهٔ خویش را صرف بدو طریقهٔ بسیار عمده معطوف میداریم .

ـ قانون ساین (Law of Sines)

ـ قانون کوساین (Law of Cosines)

فرض کنید در مثلث $\hat{ABC}$ اضلاع آن باالترتیب a ، b، و c باشند .

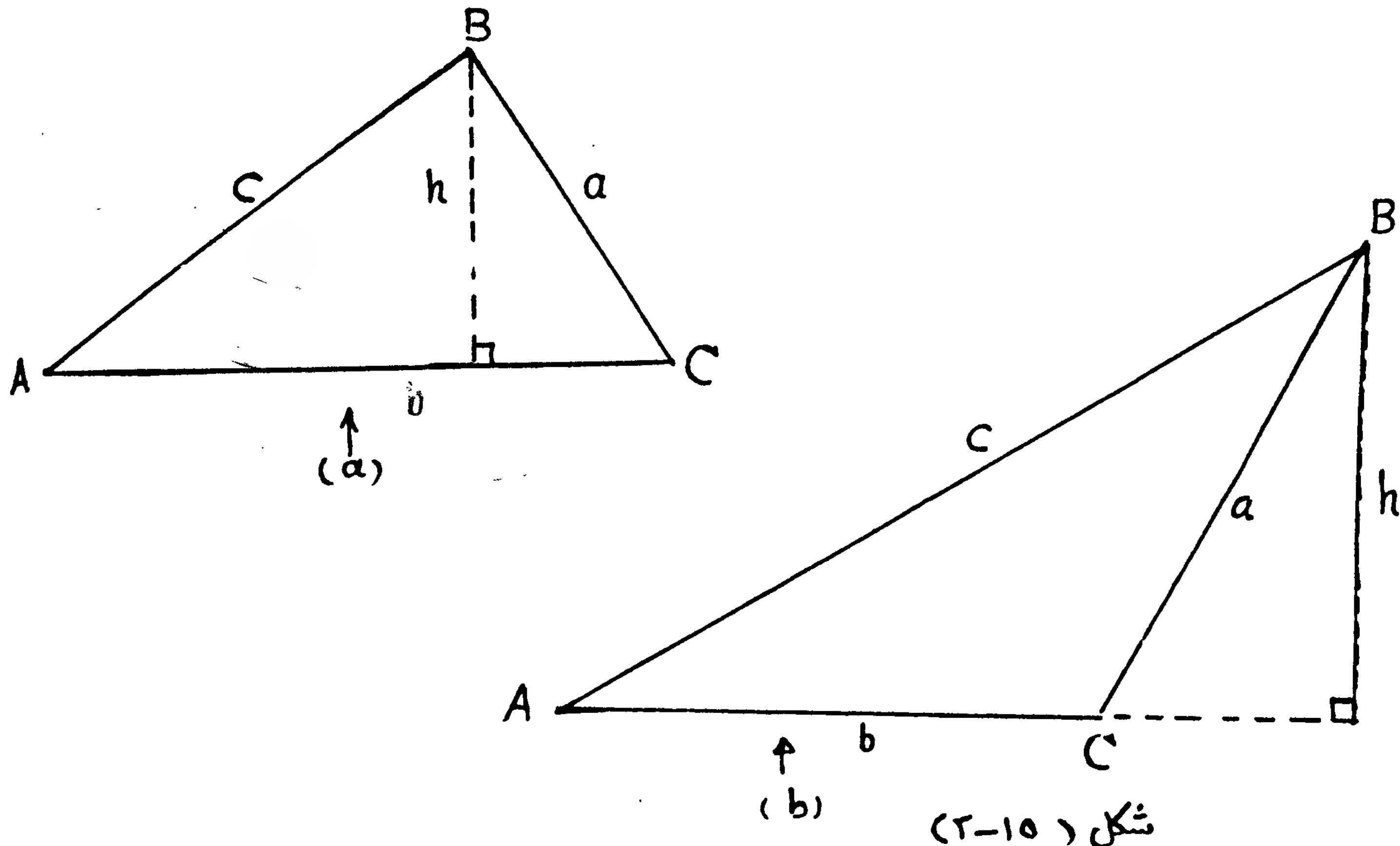
مایك عمود (h) را از زاویهٔ $\hat{B}$ بالای ضلع (b) رسم مینمائیم .

شکل(۱۵a-۲)

ازشکل (a ۱۵–۲) ما داریم :

$h = c\sin A$ or $h = a\sin C$ ...... (2-4) – (a)شکل

$h = c\sin A$ or $h = a\sin(180^\circ - C) = a\sin C$ ...... (2-5) ——— (b)شکل



شکل (۱۵–۲)

چون در معادلات (2-4) و (2-5) یکطرف آنها باهم مساوی اند، لهذا چنین نوشته میتوانیم :

$$c\sin A = a\sin C \xrightarrow{\text{یا}} \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \ldots\ldots (2-6)$$

$$c\sin B = b\sin C \xrightarrow{\text{یا}} \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \ldots\ldots (2-7)$$

اگر معادلات (2-7) و (2-6) باهم تعویض نمائیم ،

قانون ساین بدست می آید.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-8) \Leftarrow \text{قانون ساین}$$

قانون ساین تناسب بین اضلاع و ساین زاویه های یك مثلث را نشان میدهد. حال

باید دانست، که قانون ساین برای حل مثلث که دو زاویه و یك ضلع آن معلوم باشد، بکار می رود.

اگر دو زاویهٔ یك مثلث معلوم باشد، زاویهٔ سوم طوری پیدا میشود، که مجموع دو زاویهٔ معلوم را از(۱۸۰)تفریق نمائیم. بعداً با استفاده از «قانون ساین» سایر اجزاء مثلث را حل کرده میتوانیم.

مثال :

دریافت کنید، اگر c، $\hat{A}$، $\hat{B}$ معلوم باشند.

شکل (۱۶_۲) $C = 6.00'', \hat{A} = 60.0^\circ \quad \hat{B} = 40.0^\circ$

داده شده است.

$$\hat{C} = 180.0^\circ - (60.0^\circ + 40.0^\circ) = 80.0^\circ$$

چنانچه :

$$\frac{a}{\sin 60.0^\circ} = \frac{6.00}{\sin 80.0^\circ} \quad \text{یا} \quad a = \frac{6.00 \sin 60.0^\circ}{\sin 80.0^\circ} = 5.28''$$

$$\frac{b}{\sin 40.0^\circ} = \frac{6.00}{\sin 80.0^\circ} \quad \text{یا} \quad b = \frac{6.00 \sin 40.0^\circ}{\sin 80.0^\circ} = 3.92''$$

$$a = 5.28'' \quad , \quad b = 3.92'' \quad , \quad C = 80.0^\circ$$

سوال فوق توسط کلکولیتر حل شده است. شکل (۱۷ _ ۲)

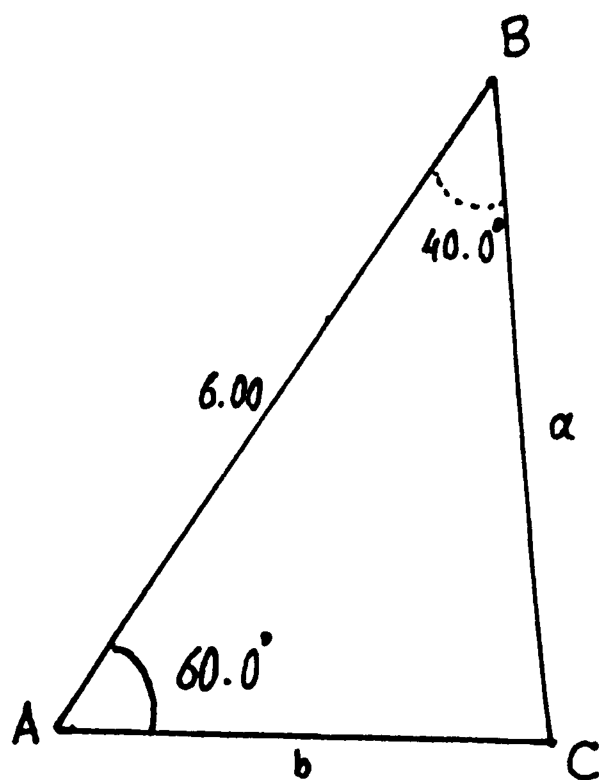
Min حافظه ماشین حساب

6 [÷] 80 [sin] [=] [STO]

ضرب [×] 60 [SIN] [=] ⟶ a قیمت

[RCL] [×] 40 [SIN] [=] ⟶ b قیمت

Mr. ضرب



شکل (۱۲-۳)

مثال: مثلث را حل نمائید، که:
عناصر ذیل درآن داده شده باشند. شکل (۱۷-۳)

$$a = 63.7'' \,,\ \hat{A} = 56.0° \,,\ \hat{B} = 97.0°$$

چون دو زاویه معلوم است زاویهء سوم عبارت است از:

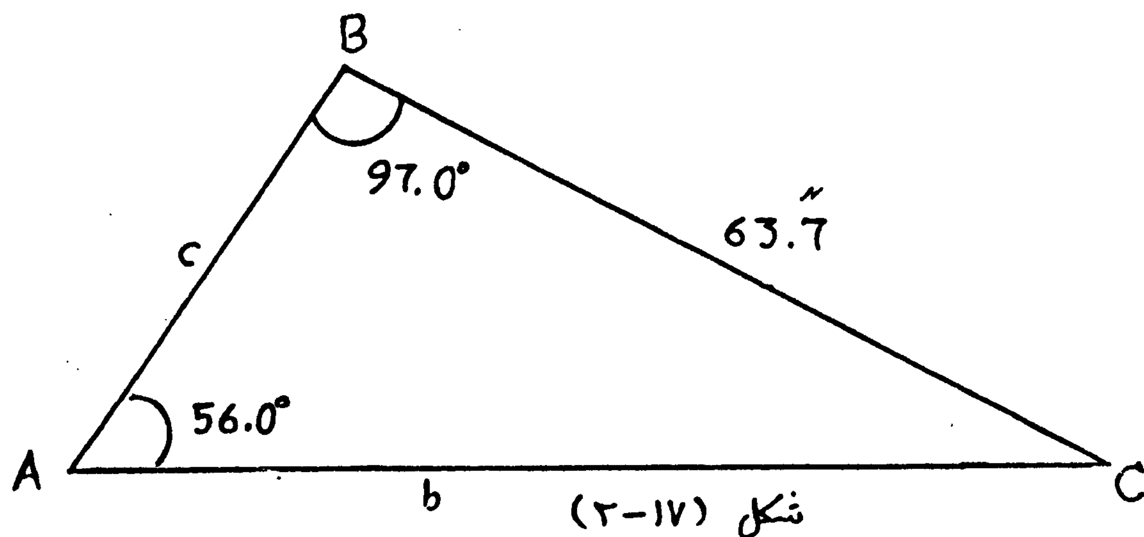
$$\hat{C} = 180 - (A + B) = 27.0°$$

$$\hat{C} = 27.0°$$

$$\frac{b}{\sin 97.0°} = \frac{63.7}{\sin 56.0°} \text{ یا } \rightarrow b = \frac{63.7 \sin 97.0°}{\sin 56.0°} = 76.3''$$

$$\frac{c}{\sin 27.0°} = \frac{63.7}{\sin 27.0°} \text{ یا } \rightarrow C = \frac{63.7 \sin 27.0°}{\sin 56.0°} = 34.9''$$

$\therefore \quad b = 76.3'' , c = 34.9'' , C = 27.0°$



شکل (۱۷-۲)

مثال : مثلث را حل نمائید ،که عناصر ذیل دران داده شده باشند. شکل (۱۸-۲)

$b = 5.063'' , \hat{A} = 42.25° , \quad \hat{C} = 28.54°$

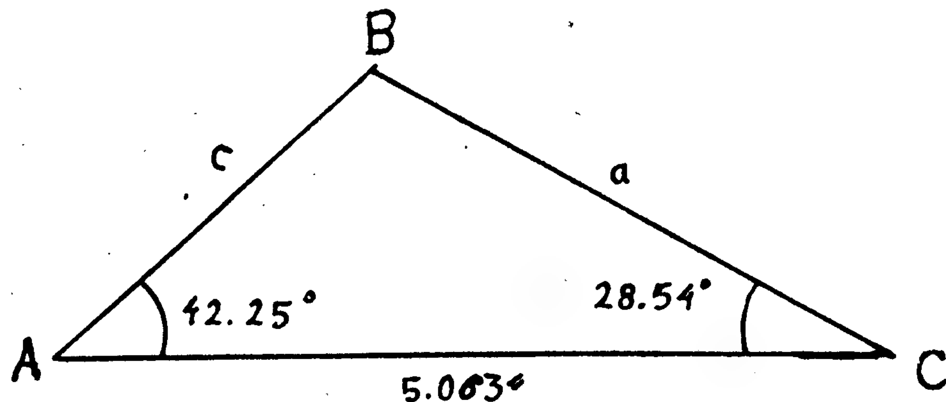
لهذا زاویهٔ $\hat{B}$ مساوی است به : $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C})$

$\therefore \quad \hat{B} = 109.21°$

$\frac{a}{\sin 42.25°} = \frac{5.063}{\sin 109.21°}$ یا $a = \frac{5.063 \sin 42.25°}{\sin 109.21°} = 3.605$

$\frac{c}{\sin 28.54°} = \frac{5.063}{\sin 109.21°}$ یا $\rightarrow c = \frac{5.063 \sin 28.54°}{\sin 109.21°} = 2.562$

$a = 3.605'' , \; c = 2.562'' , \; \hat{B} = 109.21°$; شکل(۱۸-۲)

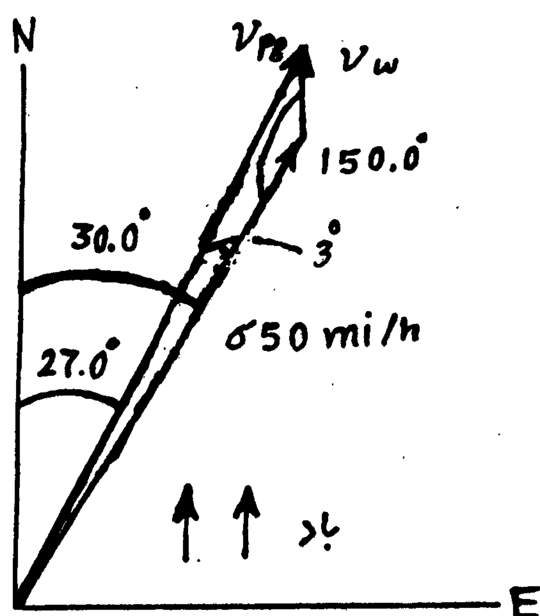


شکل (۱۸-۲)

هرگاه معلومات کافی بدست باشد، ما میتوانیم با استفاده "از قانون ساین" پرابلم های عملی را حل نمائیم. مثالهای ذیل کاربرد قانون ساین را تشریح می نمایند.

مثال : یك طیاره نظر به هوا با سرعت (٦٥٠)میل در فی ساعت به سمت شمال شرق به زاویهٔ (٣٠°) حرکت میکند. باد از سمت جنوب می وزد، و مسیر حرکت طیاره را به زاویهٔ (٢٧°) شمال شرق، تغیر میدهد. شما سرعت باد و سرعت طیاره را نظر به زمین معلوم نمائید؟

حل : شکل (١٩_٢) تمام معلومات فوق را منعکس میسازد.



شکل (١٩-٢)

$$\frac{V_w}{\sin 3.0^\circ}=\frac{V_{pg}}{\sin 150.0^\circ}=\frac{650}{\sin 27.0^\circ}$$

V_w ← .... سرعت باد V_{pg} ← ...... سرعت طیاره نظر به زمین

$$V_w=\frac{650\sin 3.0^\circ}{\sin 27.0^\circ}=74.9\ mi/h$$

$$V_{pg}=\frac{650\sin 150.0^\circ}{\sin 27.0^\circ}=716\ mi/h$$

ما مطابق "حالت دوم" (دو ضلع و زاویهٔ مقابل یك ضلع معلوم باشد)، میتوانیم دریافت نمائیم، دو مثلث موجود خواهد بود که معلومات ارائه شده را تکافو نمایند.

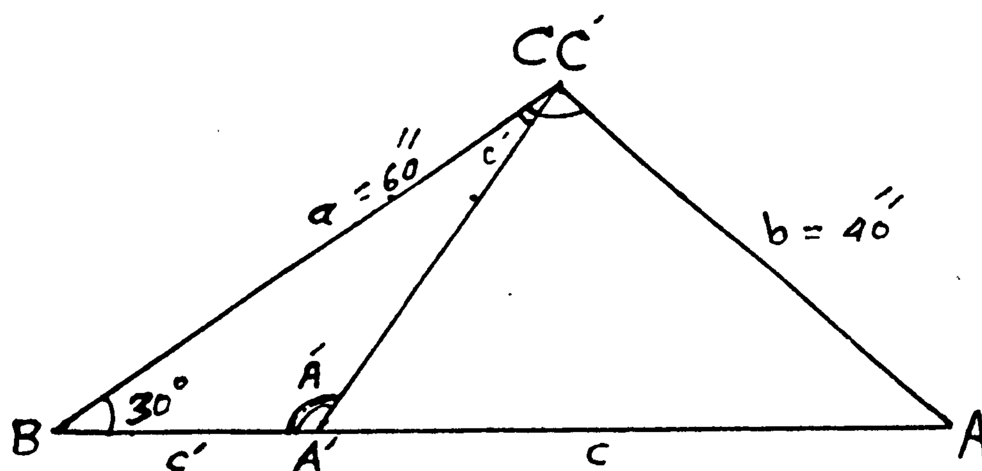
مثال ذیل درین مورد مطلب را واضح می نماید.

مثال : مثلث را حل نمائید که عناصر ذیل دران معلوم باشد:

$a=60.0'', b=40.0''\ \ \hat{B}=30.0^\circ$

حل : با ترسیم رسم صحیح ، که در شکل (٢٠-٢) ارائه شده، میتوانیم بگوئیم که زاویهٔ مقابل ضلع (a)، ($\hat{A}$) ویا ($\hat{A}'$) خواهد بود، هردو حالت زاویهٔ مطلوب را تشریح می نماید. لهذا، دو مثلث _ که ما میتوانیم بااستفاده از "قانون ساین آنهارا حل نمائیم مشاهده میشوند.

(الف) : اگر زاویهٔ ($\hat{A}$) را در مقابل ضلع (a) درنظر بگیریم.



شکل (۲۰-۲)

$$\frac{60.0}{\sin A} = \frac{40.0}{\sin 30.0^\circ} \rightarrow$$ یا $$\sin A = \frac{60.0 \sin 30.0^\circ}{40.0} = 0.7500$$

$\hat{A} = 48.6^\circ \qquad \hat{C} = 101.4^\circ$ فلهذا:

$$\frac{c}{\sin 101.4^\circ} = \frac{40.0}{\sin 30.0^\circ}$$ یا $$c = \frac{40.0 \sin 101.4^\circ}{\sin 30.0^\circ} = 78.4''$$ { با استفاده از قانون ساین }

$$\frac{60.0}{\sin A'} = \frac{40.0}{\sin 30.0^\circ}$$

$\sin A' = 0.7500 , \qquad A' = 131.4^\circ$

$A' = 131.4^\circ , \hat{C} = 18.6^\circ$

$$\frac{c'}{\sin 18.6^\circ} = \frac{40.0}{\sin 30.0^\circ}$$ یا $$c' = \frac{40.0 \sin 18.6^\circ}{\sin 30.0^\circ} = 25.5$$

$\hat{A}' = 131.4^\circ , \ \hat{C}' = 18.6^\circ , \ c' = 25.5''$

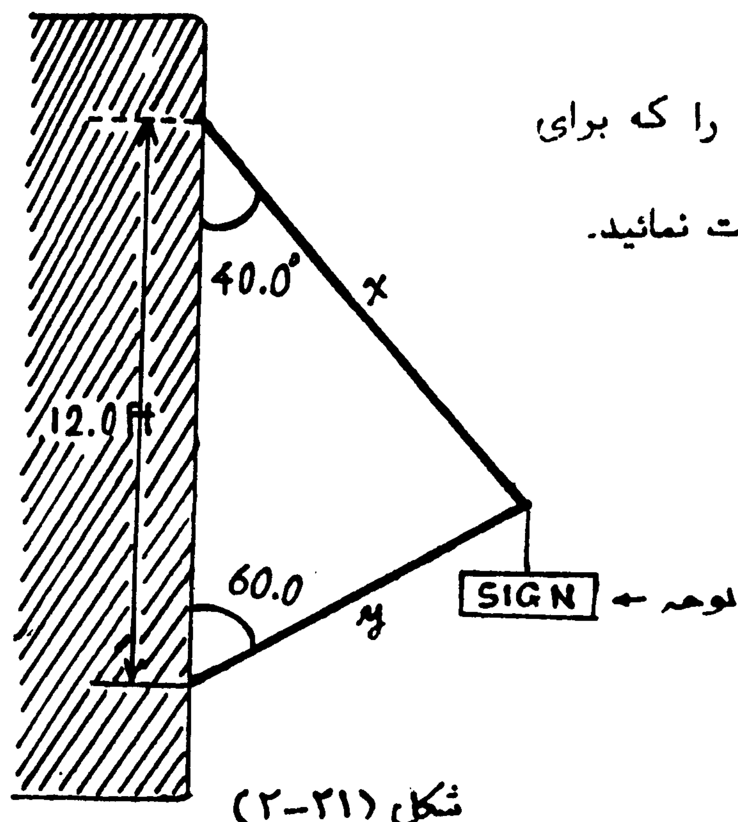
تمرین (۵-۳)

۱ـ در تمرین های ۱ الی ۲۰ بعضی عناصر مثلث ها داده شده است ، عناصر متباقی را دریافت نمائید.

1. $a = 45.7, A = 65.0°, B = 49.0°$
2. $b = 3.07, A = 26.0°, C = 120.0°$
3. $c = 4380, A = 37.4°, B = 34.6°$
4. $a = 93.2, B = 17.9°, C = 82.6°$
5. $a = 4.601, b = 3.107, A = 18.23°$
6. $b = 3.625, c = 2.946, B = 69.37°$
7. $b = 77.52, c = 36.42, B = 20.73°$
8. $a = 150.4, c = 250.9, C = 76.43°$
9. $b = 0.0742, B = 51.0°, C = 3.36°$
10. $c = 729, B = 121.0°, C = 44.18°$
11. $a = 63.8, B = 58.4°, C = 22.2°$
12. $a = 13.0, a = 55.2°, B = 67.5°$
13. $b = 4.384, B = 47.43°, C = 64.56°$
14. $b = 283.2, B = 13.79°, C = 76.38°$
15. $a = 5.240, b = 4.446, B = 48.13°$
16. $a = 89.45, c = 37.36, C = 15.62°$
17. $b = 2880, c = 3650, B = 31.4°$
18. $a = 0.841, b = 0.965, A = 57.1°$
19. $a = 45.0, b = 126, A = 64.8°$
20. $a = 10.0, c = 5.00, C = 30.0°$

در شکل (۲۱-۲) طول های مجهول را که برای آویزان کردن یك لوحه لازم است، دریافت نمائید.

$x = ?$ ، $y = ?$



شکل (۲۱-۲)

استفاده می نمائیم $1\ rad \cong 57.30^\circ$

مثال: 1.5rad. را به درجه تبدیل کنید؟

$$1\ rad = 57.30^\circ$$
$$1.5\ rad = X$$
$$X = (1.5)(57.30) = 85.95^\circ$$

اکثراً جداول مثلثاتی زاویه ها را به دقیقه و ثانیه نشان میدهند، درحالیکه تیکنالوژی جدید، کلکولیتر و کمپیوتر از سیستم اعشاری استفاده می کنند ، از اینرو لازم است تا مقدار های اعشاری را به دقیقه و ثانیه، و برعکس دقیقه و ثانیه را به اعشاری تبدیل کرده بتوانیم .

مثال اول: $43^\circ 24'$ را به سیستم اعشاری تبدیل کنید؟

طرز حل : چون

$$1^\circ = 60'$$
$$X^\circ = 24'$$
$$\therefore X = \frac{24'}{60'} = 0.4^\circ$$

پس $43^\circ 24' = 43.4^\circ$

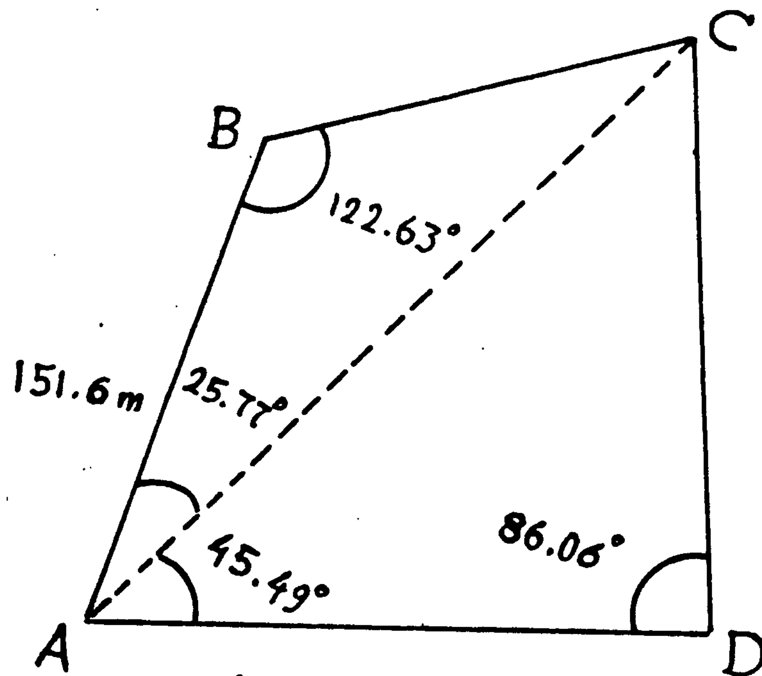
مثال دوم : $17^\circ 53'$ را به شکل اعشاری تبدیل کنید.

$$1^\circ = 60'$$
$$X^\circ = 53'$$
$$\therefore X = \left(\frac{53'}{60}\right)(1^\circ) = 0.88^\circ$$
$$17^\circ 53' = 17.88^\circ$$

مثال سوم : 154.36° را به سیستم درجه و دقیقه تبدیل نمائید.

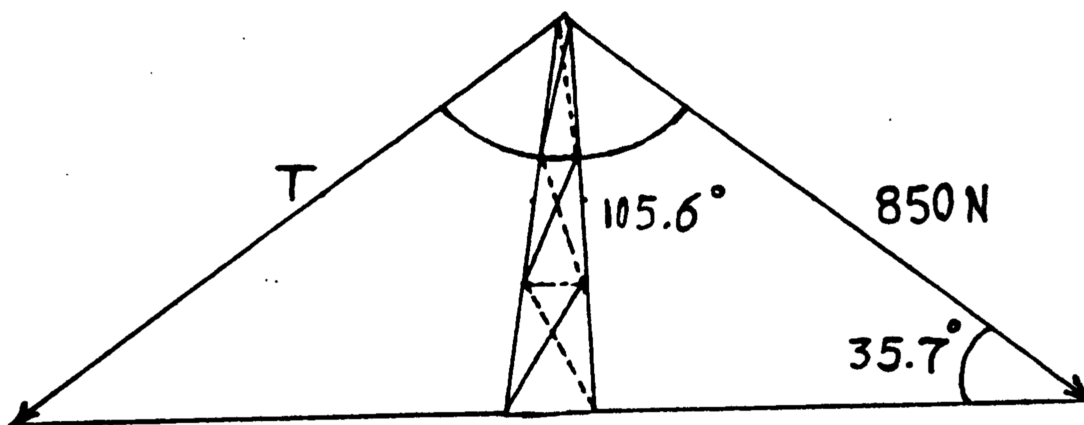
$$1^\circ = 60'$$
$$0.36^\circ = X$$
$$\therefore X = 0.36(60') = 21.6'$$
$$154.36^\circ \cong 154^\circ 22' = 154^\circ 21.6'$$

۲۲ـ شکل (۲۲ـ۲) یك چار ضلعی است ، طول هر چار ضلع آنرا معلوم کنید ؟



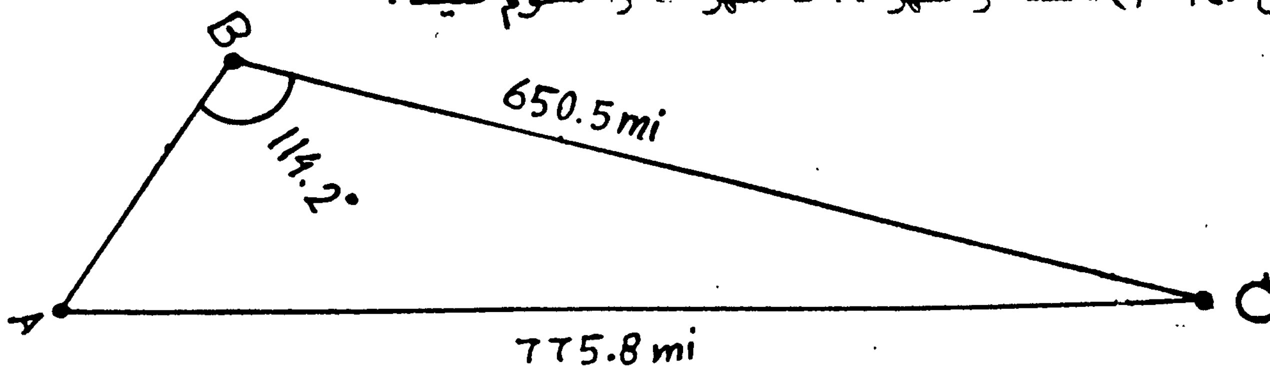
شکل (۲-۲۲)

۲۳ـ در شکل (۲۳ـ۲) یك پایهٔ برق توسط دو کیبل قایم گردیده، قوهٔ کشش کیبل را معلوم کنید ؟

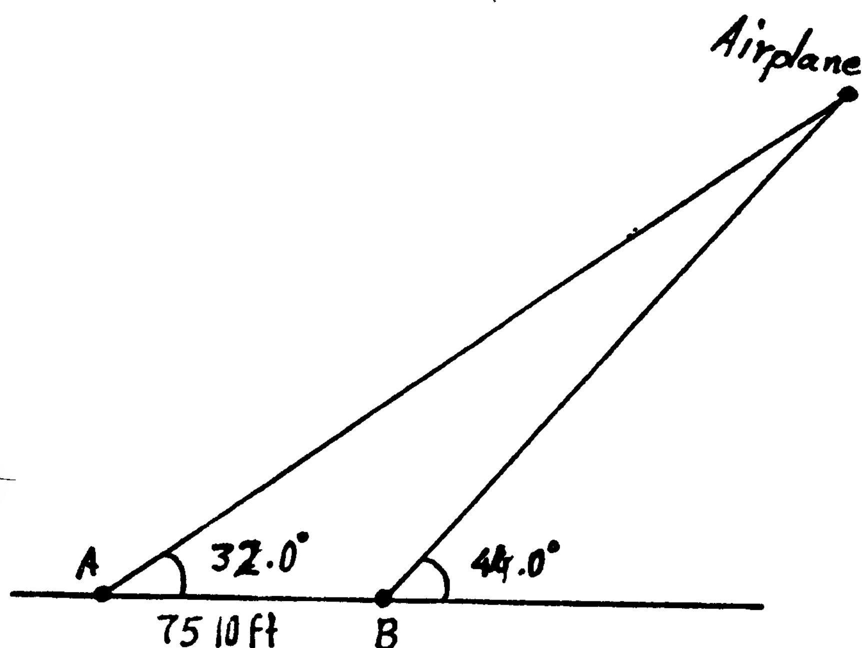


شکل (۲-۲۳)

۲٤ـ در شکل (۲٤ـ۲) فاصلهٔ از شهر A تا شهر B را معلوم کنید ؟



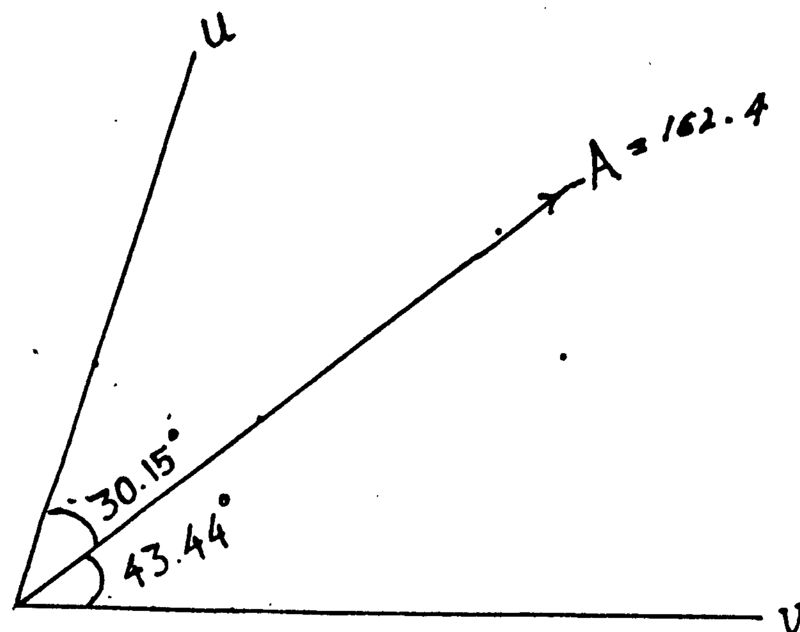
شکل (۲-۲٤)



شکل (۲۵–۲)

۲۵– زاویه ای ایلویشن از نقاط مختلف (A)، و (B) که به فاصله (۷۵۱۰) فت از هم دیگر دور موقعیت دارند ، باالترتیب داده شده اند. شکل (۲۵–۲) که باالترتیب (۳۲°، و ۴۴°) میباشند، (طیاره و نقاط (A)، و (B) همه در یک سطح شاقولی موقعیت دارند ، معلوم کنید که نقطه (A) از طیاره چقدر دور است ؟

۲۶– در شکل (۲۶–۲) ویکتور ($\vec{A}$)، (A = 162.4) معلوم است، شما این ویکتور را به دو جز بالای مسیر (u) و (v) طوریکه در شکل نمایان است، تجزیه نمائید ؟



شکل (۲۶–۲)

۲۷ـ کشتی یی از یك بندر بطرف غرب شروع به حرکت می نماید، و بعد از مدتی در یك نقطهٔ معین به زاویهٔ $31/5^\circ$ بطرف شمال حرکت خودرا ادامه میدهد. و به یك نقطهٔ که ٦۳ میل از بندر مستقیماً فاصله دارد، میرسد.

اگر فاصلهٔ دومی که کشتی یی مذکورطی کرده (٤۲) میل باشد، معلوم کنید نقطهٔ که کشتی دور خورد، از بندر چقدر دور واقع است ؟

۲۸ـ شهر B به زاویهٔ $42/2^\circ$ در جنوب ـ شرق شهر A واقع است پیلوتیکه میخواهد طیارهٔ خود را از شهر A به سوی شهر B پرواز دهد، به کدام سمت باید حرکت کند، درصورتیکه باد به سرعت ٤۰ کیلومتر فی ساعت ازطرف غرب می وزد.

و طیاره ۳۰۰ کیلومتر فی ساعت سرعت دارد. مسیر حرکت طیاره را مشخص سازید؟

۲۹ـ یك قمر مصنوعی مستقیماً بالای استوای مراکز مخابروی A، و B موقعیت دارد. توسط مخابره رادیویی دریافت شده، که قمرموصوف از مرکز A به زاویهٔ ایلویشن $89/2^\circ$ موقعیت دارد، و زاویهٔ ایلویشن قمرمصنوعی از مرکز B $86/5^\circ$ میباشد. اگر مراکز مخابراتی A، و B از همدیگر به فاصلهٔ ۱۲۹۰ کیلومتر واقع باشند، قمرمصنوعی از نقطهٔ A چقدر دور است ؟ (کرویت زمین را درنظر نگیرید).

۳۰ـ یك نفر یك پارچه زمین مثلث ـ شکل را اندازه نموده، و راپور ذیل را ارائه داشته است که : یك ضلع زمین ٥۸/٤ فت و ضلع دیگر آن ۲۱/۱ فت طول دارد، و زاویهٔ مقابل ضلع کوتاه مثلث(24°)است شما ثابت نمائید، که آیا این معلومات درست است یاخیر؟

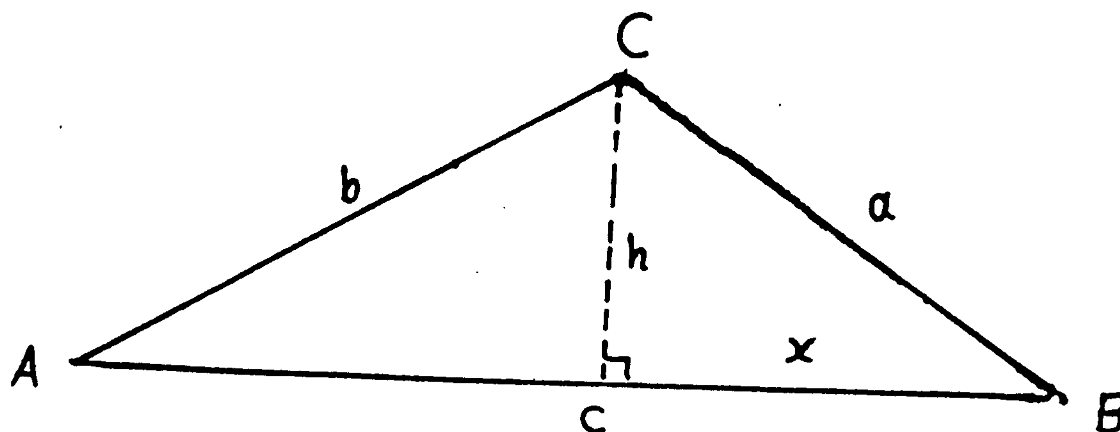
قانون کوساین

(Cosines law)

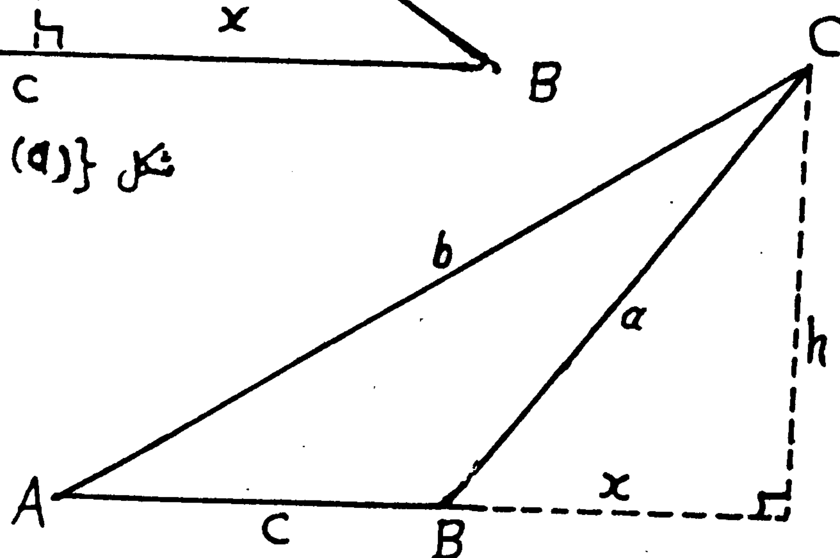
در بخش اخیر درس گذشته تذکر داده شد ،که هرگاه حل مثلث تحت قواعد حالات سوم - و چارم (۱) (۲، ٤) واقع گردد ، حل مثلث از طریق قانون ساین (Sines law) ناممکن خواهد بود. از اینرو لازم است تا یك طریقهٔ دیگر جستجو شود ، که یك (عنصر) مثلث را ذریعهٔ قانون کوساین معلوم کرده بتوانیم،متباقی آنرا میتوان از طریق «قانون ساین» دریافت نمائیم . ما این کار را ازآن جهت انجام میدهیم ، که قانون ساین آسانتر تطبیق شده میتواند.

یك مثلث کیفی (Oblique) را درنظر بگیریم شکل (۲۷_۲). میدانیم که در هر یکمثلث h = b Sin A است . بااستفاده از قضیهء فیثاگورث که($a^2 = h^2 + x^2$)است، بنابر این چنین نوشته کرده میتوانیم :

$$\sin A = \frac{h}{b} , \; \underline{\text{ یا }} \; h = b \sin A$$



شکل {۲-۲۷ (a)}



شکل(b۲-۲۷)

$(\sin A)^2 = \sin^2 A$

این نوشته عین مفهوم دارد

$$a^2 = b^2 \sin^2 A + x^2$$

$C+x = b\cos A,\quad x = c - b\cos A.$
$C+x = b\cos A,\quad x = b\cos A - c.$ } .... (2-9) در شکل (b)

از معادلهٔ (2-9)

داریم: ← $a^2 = b^2\sin^2 A + (C - b\cos A)^2$

$a^2 = b^2\sin^2 A + (b\cos A - C)^2$ و .... (2-10)

به شکل $(a-b)^2$ ↓

معادلهٔ فوق را انکشاف میدهیم:

$a^2 = b^2\sin^2 A + b^2\cos^2 A + c^2 - 2bc\cos A$ . . (2-10)

$a^2 = b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$ . . . . (2-11)

به تعریف توابع مراجعه می نمائیم که:

$\sin\theta = y/r,\quad \cos\theta = x/r,$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = (y^2 + x^2)/r^2.$

$x^2 + y^2 = r^2$ . . . از طرف دیگر (قضیه فیثاغورث)

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ← به مفهوم آنکه: . . . . (2-12)

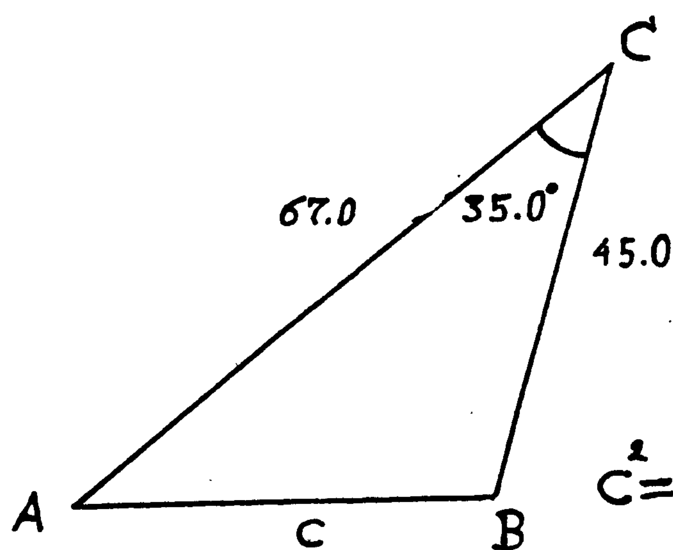
در معادله (2-11) تعویض نمائیم.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ← قانون کوساین . . . . (2-13)

همچنان ثابت کرده میتوانیم که: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

یا داریم: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

قانون کوساین (for the three formulas above)



شکل (۲۸-۲) .

مثال (الف) : مثلثی را حل نمائید که:
شکل (۲۸_۲) .

$a=45.0,\ b=67.0,\ C=35.0^\circ$

نظر به قانون کوساین داریم :

$c^2=(45.0)^2+(67.0)^2-2\{(45.0)(67.0)\}\cos 35.0^\circ$

$c=39.7$

از طریق قانون ساین نوشته کرده میتوانیم :

$$\frac{45.0}{\sin A}=\frac{67.0}{\sin B}=\frac{39.7}{\sin 35.0^\circ}$$

که درنتیجه :

$\sin A=0.6501 \qquad A=40.6^\circ$

زاویای داخلی یك مثلث (۱۸۰°) درجه است .

$\therefore \quad \hat{B}=104.4^\circ$

مثال (ب): در مثال (الف) اگر $C=145.0^\circ$ باشد، شکل (۲۹_۲)، جاًت ذکر یابید .

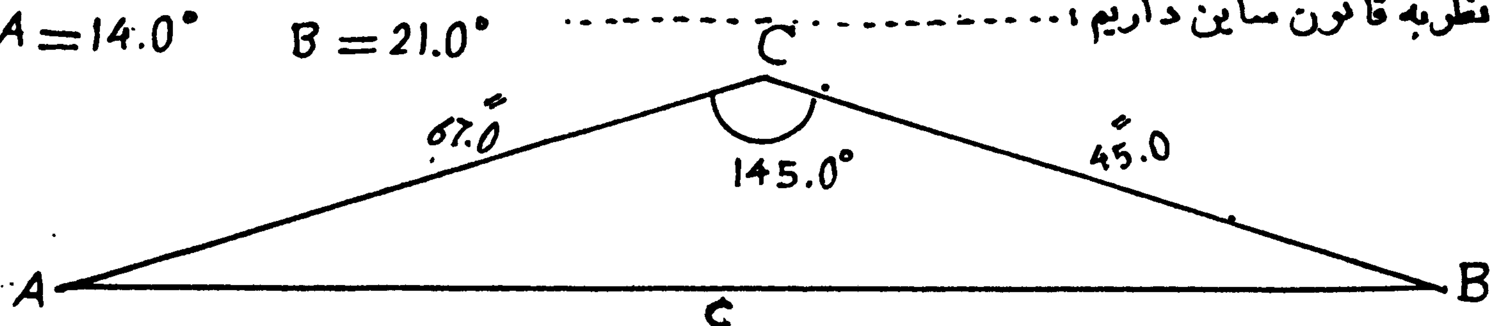
درشکل (۲۹-۲)

$c^2=(45.0)^2+(67.0)^2-2\{(45.0)(67.0)\}\cos 145.0^\circ$

$c=107$

نظر به قانون ساین داریم : ....

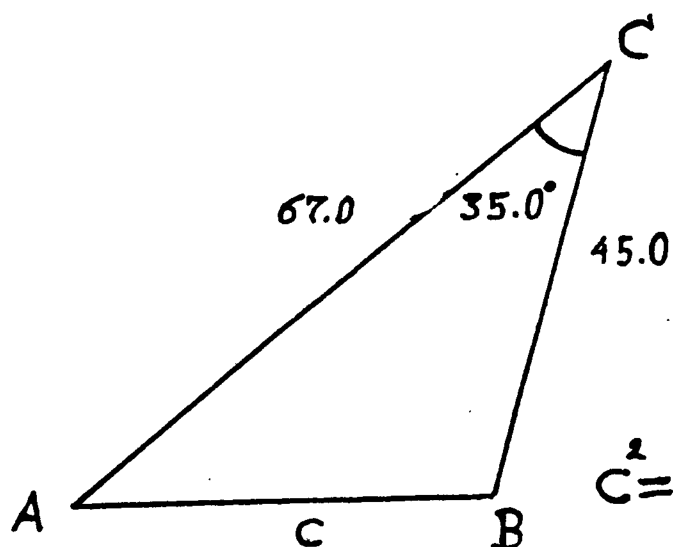
$A=14.0^\circ \qquad B=21.0^\circ$



شکل (۲۹-۲)

مثال (الف): مثلثی را حل نمائید که:

شکل (۲۸_۲) .



شکل (۲-۲۸) .

$$a = 45.0'' ,\ b = 67.0'',\ C = 35.0^\circ$$

نظر به قانون کوساین داریم :

$$c^2 = (45.0)^2 + (67.0)^2 - 2\{(45.0 \times 67.0)\} \cos 35.0^\circ$$

$$c = 39.7''$$

از طریق قانون ساین نوشته کرده میتوانیم :

$$\frac{45.0}{\sin A} = \frac{67.0}{\sin B} = \frac{39.7}{\sin 35.0^\circ}$$

که درنتیجه :

$$\sin A = 0.6501 \qquad A = 40.6^\circ$$

زاویای داخلی یک مثلث (180°) درجه است .

$$\therefore \qquad \hat{B} = 104.4^\circ$$

مثال (ب): در مثال (الف) اگر $C = 145.0^\circ$ باشد، شکل (۲۹_۲)، بدست آورید .

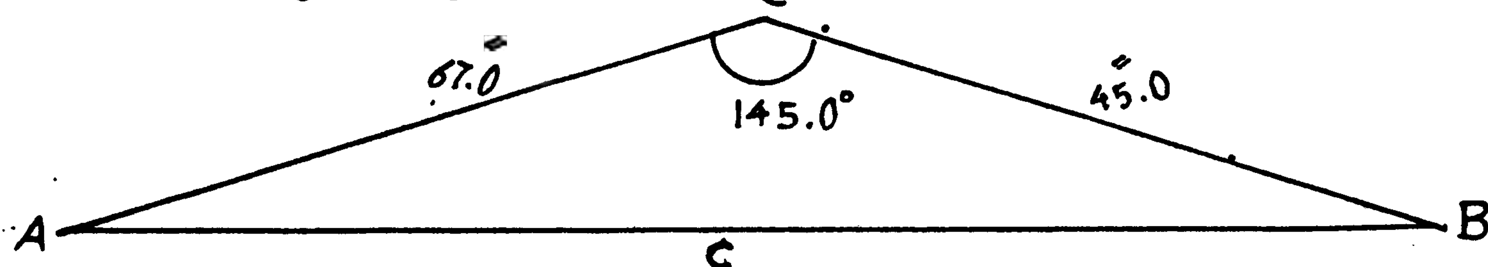
درشکل (۲-۲۹)

$$c^2 = (45.0)^2 + (67.0)^2 - 2\{(45.0)(67.0)\} \cos 145.0^\circ$$

$$c = 107''$$

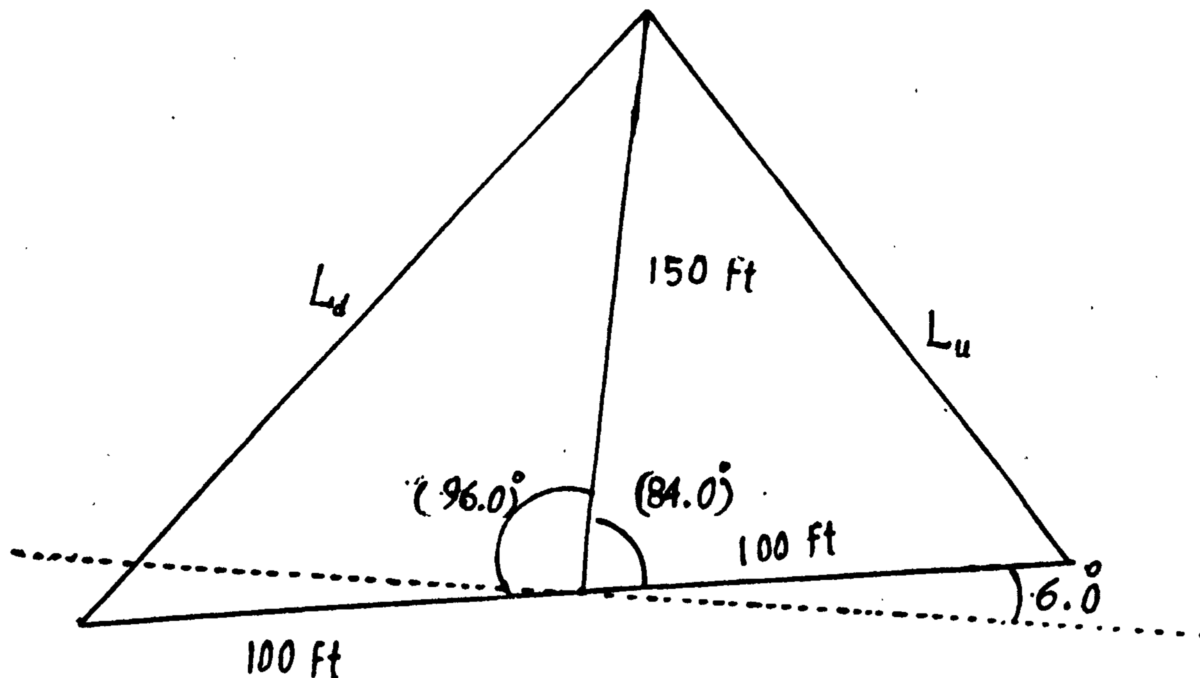
نظر به قانون ساین داریم :

$$A = 14.0^\circ \qquad B = 21.0^\circ$$



شکل (۲-۲۹)

مثال (هه): یك آنتن رادیو بالای یك تپه که زاویهء (۶°) با سطح افقی میسازد، نصب میگردد. اگر دو کیبل کشش (guy wires) به ارتفاع (۱۵۰) فت درانجام آنتن به فاصلهٔ (۱۰۰) فت دورتر از قاعدهء آنتن جهت حفظ توازن آن بکار برده شوند. شما طول این دو عدد کیبل که یکی آن در بالائی تپه، دیگر در پائین تپه نصب میگردند، دریافت کنید؟ شکل (۳۲_۲) .



شکل (۳۲-۳)

درشکل (۳۲-۲) میتوانیم نوشته کنیم:

$$L_u^2 = (100)^2 + (150)^2 - 2\{(100)(150)\}\cos 84.0^\circ$$

$$L_u = 171 \text{ ft}$$

$$L_d^2 = (100)^2 + (150)^2 - 2\{(100)(150)\}\cos 96.0^\circ$$

$$L_d = 189 \text{ ft}$$

تمرین (۶-۳): از تمرین ۱ الی ۲۰، مثلث های ذیل را حل نمائید.

1. $a = 6.00,\ b = 7.56,\ C = 54.0^\circ$
2. $b = 87.3,\ C = 34.0,\ A = 130.0^\circ$

3. $a = 4530, b = 924, C = 98.0°$
4. $a = 0.0845, C = 0.116, B = 85.0°$
5. $a = 39.53, b = 45.22, C = 67.15$
6. $a = 23.31, b = 27.26, C = 29.17$
7. $a = 385.4, b = 467.7, C = 800.9$
8. $a = 2433, b = 0.2635, C = 0.1538$
9. $a = 320, b = 847, C = 158.0°$
10. $b = 18.3, C = 27.1, A = 58.7°$
11. $a = 21.4, C = 4.28, B = 86.3°$
12. $a = 11.3, b = 5.10, C = 77.6°$
13. $a = 103.7, C = 159.1, C = 104.67°$
14. $a = 49.32, b = 54.55, B = 114.36°$
15. $a = 0.4937, b = 0.5956, C = 0.6398$
16. $a = 69.72, b = 49.30, C = 56.29$
17. $a = 723, b = 598, C = 158$
18. $a = 1.78, b = 6.04, C = 4.80$
19. $a = 15.6\ A = 15.1°, B = 150.5°$
20. $a = 17.5, b = 24.5, C = 37.0$

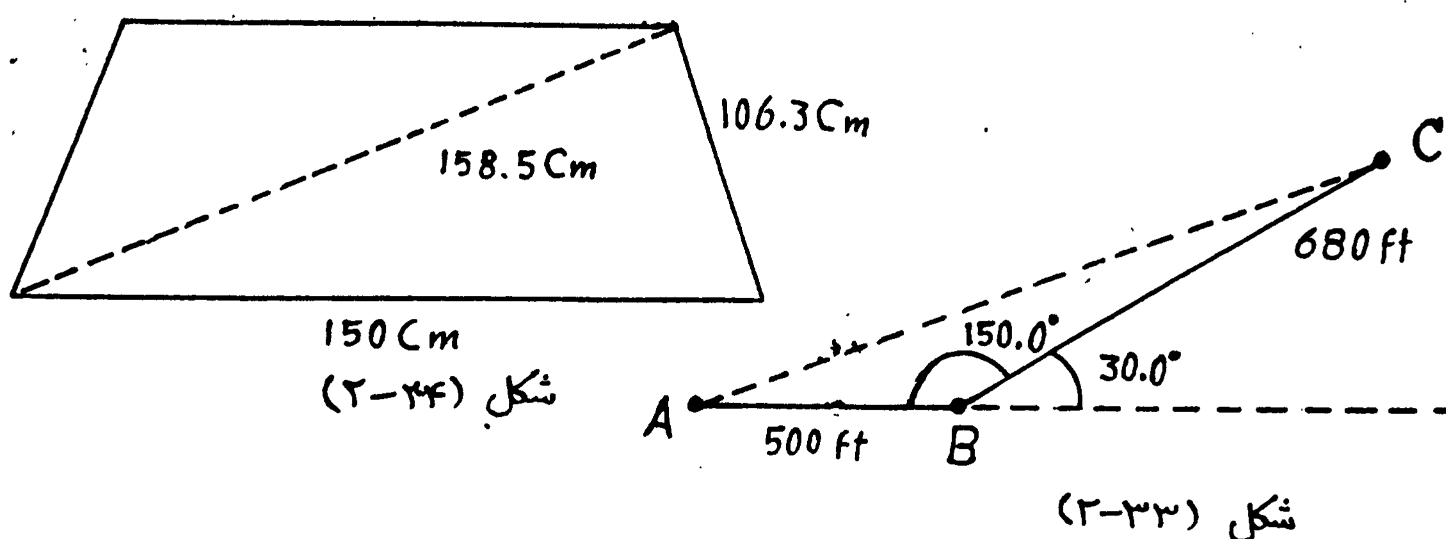
با استفاده از قانون کوساین سوالات ذیل را حل نمائید.

۲۱ـ جهت پیمایش فاصلهٔ (AC) یك زن به اندازه (۵۰۰) فت از نقطهٔ (A) تا نقطهٔ (B) پیاده روی میکند. بعداً به زاویهٔ (۳۰°) به سمت (C) دور میخورد. از نقطهٔ (B) تا نقطهٔ (C) باز (۶۸۰) فت پیاده روی میکند فاصلهٔ (AC) را دریافت نمائید؟ شکل (۳۲ـ۲).

۲۲ـ یك طیاره به سرعت (۷۰۰) کیلومتر فی ساعت میدان را هنگام چاشت به سمت شرق ترك میگوید. ساعت دوبجه بعد از ظهر پیلوت به زاویهٔ (۱۰°) طرف شمال شرق دور میخورد، طیاره در ساعت سه بعد از ظهر ازمیدان طیاره چقدر دورتر خواهد بود؟

۲۲ـ جهت پیپ کاری از خاطر یك مانع که در پیشروی می آید،پیپ تیل به دومسیر مستقیم مختلف دوانده میشود،که یکی(۳/۷۵٦)کیلومتر و دیگر(٤/٦۷۵)کیلومتر طول دارد. زاویه در نقطه جاینت آن ها(°۱٦۸/۸۵)درجه است . شما دریافت نمائید که چقدر پایپ اضافی در این سیستم پایپ کاری مصرف شده است .

۲٤ـ تخته روی یك میز به شکل ذوذنقه، متساوی الساقین میباشد. شکل (۲٤ـ۲) زاویه ها بین اضلاع آن چند درجه است .



۲۵ـ دو قوه باالترتیب(۵٦/۱٤)پوند و(٦۷/٤۲)پوند میباشند. که محصلهٔ آنها(۸۲/۳٦) پوند میشود،زاویه بین دو قوه چند درجه خواهد بود ؟

۲٦ـ در یك فریم فلزی مثلث ـ شکل،سه ضلع آن باالترتیب(۸)فت ـ(۱۲)فت و(۱٦) فت میباشد. بزرگترین زاویهٔ آن را دریافت کنید ؟

۲۷ـ یك کشتی در آب استاده به سرعت(٦)کیلومتر فی ساعت حرکت میکند. کشتی یی موصوف هم جهت جریان آب دریا به زاویهٔ(°۲۰)نظر به ساحل دریا سرعت میگیرد. اگر سرعت دریا(۳)کلیومتر فی ساعت باشد. کشتی به کدام سرعت حرکت میکند،و سمت حرکت آن کدام خواهد بود ؟

۲۸ـ سرعت یك طیارهٔ(۵۲۰)میل فی ساعت است،و به زاویهء(°۲٤)طرف شمال از غرب حرکت مینماید. باد از سمت جنوب غرب به سرعت(۵۵)میل فی ساعت می وزد. سمت حرکت حقیقی طیاره کدام است،و سرعت طیاره نظر به زمین چند خواهد بود ؟

هرگاه ضلع اولی یك زاویه بالای مثبت محور(x) واقع بوده،و رأس زاویه درنقطهء صفر محور(x)و محور(y)موقعیت داشته باشد ، درینصورت میگویند این زاویه به حالت ستندارد (Standard Position) قرار دارد. چنین زاویه به اساس موقعیت ضلع دومی ، که درکدام ربع موقعیت دارد ، شناخته میشود.اگر ضلع دومی ای زاویه درربع دوم موقعیت بگیرد ، آنرا زاویهٔ ربع دوم می گوئیم واگر درربع سوم واقع شود زاویهٔ ربع سوم و امثال آن :

هرگاه ضلع دومی زاویه بالای یکی از محورهای x یا y منطبق شود ، این زاویه را بنام زاویهء ربعی می نامند .(quadrantal Angle) .

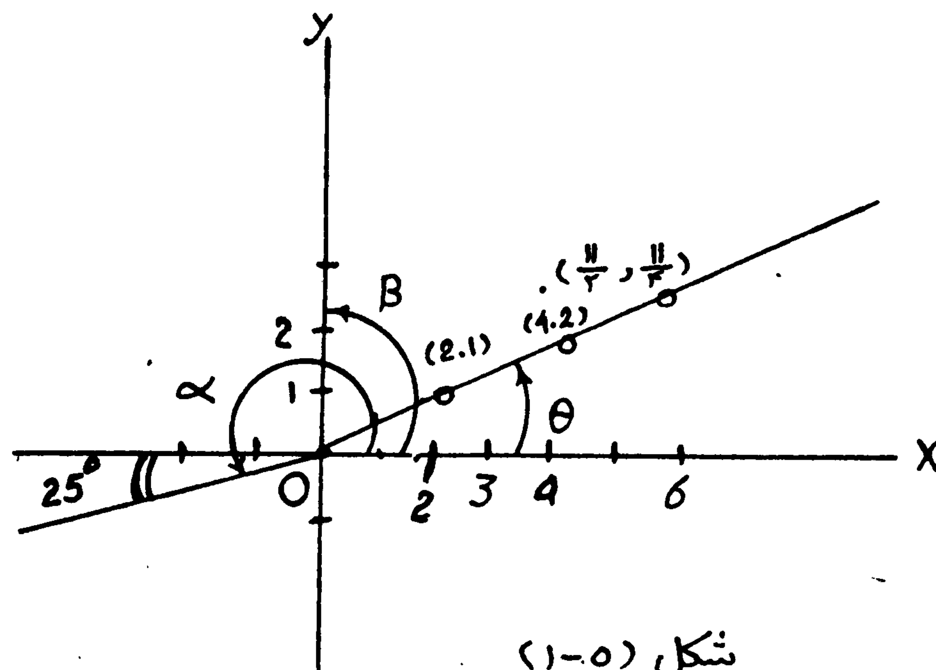
مثال چارم : میخواهیم زاویهٔ ۲۰۵° راکه زاویهء ربع سوم است رسم کنیم .

ازسمت مثبت محور X شروع کرده ، زاویهٔ رارسم میکنیم که ۲۰۵° درجه باشد.

مثلاً زاویه α در شکل (۵_۱).

در شکل (۵_۱). بوضاحت مشاهده میشود که زاویهٔ θ به حالت ستندارد است، زیرا ضلع دوم آن از نقاط : $(۲،۱)$ ، $(۴،۲)$ و $\left(\frac{۱۱}{۴} ، \frac{۱۱}{۲}\right)$ عبور میکند.

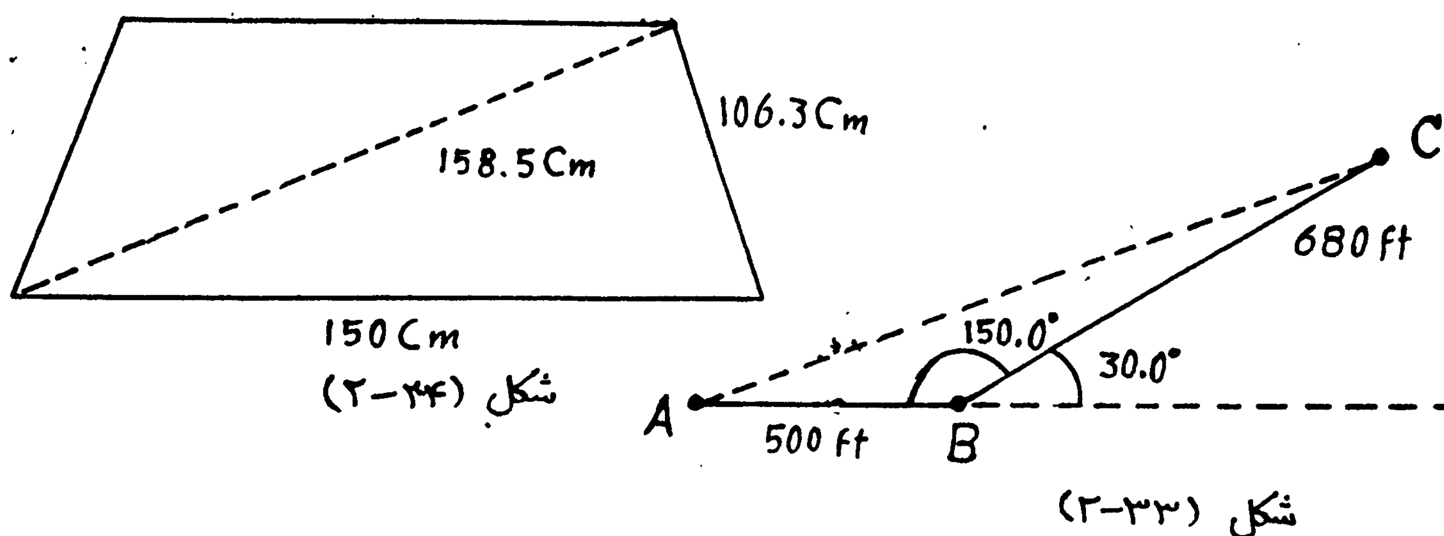
زاویهٔ β در شکل (۵_۱) یك زاویهٔ ربعی است زیرا ضلع دوم آن بالای محورy منطبق میباشد.



شکل (۵-۱)

٢٢ـ جهت پیپ کاری از خاطر یك مانع که در پیشروی می آید،پیپ تیل به دومسیر مستقیم مختلف دوانده میشود،که یکی(٣/٧٥٦)کیلومتر و دیگر(٤/٦٧٥)کیلومتر طول دارد. زاویه در نقطه جاینت آن ها(١٦٨/٨٥°)درجه است . شما دریافت نمائید که چقدر پایپ اضافی در این سیستم پایپ کاری مصرف شده است .

٢٤ـ تخته روی یك میز به شکل ذوذنقه، متساوی الساقین میباشد. شکل (٢٤ـ٢) زاویه ها بین اضلاع آن چند درجه است .



٢٥ـ دو قوه باالترتیب (٥٦/١٤)پوند و(٦٧/٤٢)پوند میباشند. که محصلهٔ آنها (٨٢/٣٦) پوند میشود ،زاویه بین دو قوه چند درجه خواهد بود ؟

٢٦ـ در یك فریم فلزی مثلث ـ شکل،سه ضلع آن باالترتیب (٨)فت ـ(١٢) فت و(١٦) فت میباشد. بزرگترین زاویهٔ آن را دریافت کنید ؟

٢٧ـ یك کشتی در آب استاده به سرعت(٦)کیلومتر فی ساعت حرکت میکند. کشتی یی موصوف هم جهت جریان آب دریا به زاویهٔ (٢٠°)نظر به ساحل دریا سرعت میگیرد. اگر سرعت دریا(٣)کلیومتر فی ساعت باشد. کشتی به کدام سرعت حرکت میکند،و سمت حرکت آن کدام خواهد بود ؟

٢٨ـ سرعت یك طیارهٔ(٥٢٠)میل فی ساعت است،و به زاویهء (٢٤°)طرف شمال از غرب حرکت مینماید. باد از سمت جنوب غرب به سرعت(٥٥)میل فی ساعت می وزد. سمت حرکت حقیقیٔ طیاره کدام است،و سرعت طیاره نظر به زمین چند خواهد بود ؟

۱ – تمرین : ازسوال(۱ الی ۴)ویکتورهای قوه داده شده است. مرکبه های آن را بالای محور (x) ومحور" y"دریافت نمائید ؟

1. $A = 65.0, \theta_A = 28.0^\circ$ 2. $A = 8.05, \theta_A = 149.0^\circ$

3. $A = 0.9204, \theta_A = 215.59^\circ$ 4. $A = 657.1, \theta_A = 343.74^\circ$

۲ – تمرین : از سوال(۵ الی ۸) دو دو ویکتور داده شده،طوریکه بالای همدیگر قایم اند، مقدار و سمت محصلهٔ آنهارا دریافت کنید ؟

5. $A = 327$, $B = 505$ 6. $A = 684$, $B = 295$ 7. $A = 4964$, $B = 3298$ 8. $A = 26.52$, $B = 89.86$

۳ – تمرین از سوال(۹ الی ۱۶)ویکتور های ارائه شده را با استفاده از توابع مثلثاتی و قضیه فیثاغورث باهم جمع نمائید؟

9. $A = 780, \theta_A = 28.0^\circ$, $B = 346, \theta_B = 320.0^\circ$ 10. $A = 0.0120, \theta_A = 10.5^\circ$, $B = 0.0078, \theta_B = 260.0^\circ$

11. $A = 22.51, \theta_A = 130.16^\circ$, $B = 7.604, \theta_B = 200,09^\circ$ 12. $A = 18.760, \theta_A = 110.43^\circ$, $B = 4835, \theta_B = 350.20^\circ$

13. $A = 51.33, \theta_A = 12.25^\circ$, $B = 42.61, \theta_B = 291,77^\circ$ 14. $A = 70.31, \theta_A = 122,54^\circ$, $B = 30,29, \theta_B = 214.82^\circ$

15. $A = 75.0, \theta_A = 15.0^\circ$, $B = 26.5, \theta_B = 192.4^\circ$, $C = 54.8, \theta_C = 344.7^\circ$ 16 $A = 8100, \theta_A = 141.9^\circ$, $B = 1540, \theta_B = 165.2^\circ$, $C = 3470, \theta_C = 296.0^\circ$

۴ – تمرین : از سوال(۱۷ الی ۲۶)مثلث های ارائه شده را حل نمائید ؟

17. $A = 48.0^\circ, B = 68.0^\circ, a = 14.5$

18. $A = 132.0^\circ, b = 7.50, C = 32.0^\circ$

19. $a = 22.8, B = 33.5^\circ, C = 125.3^\circ$

20. $A = 71.0^\circ, B = 48,5^\circ, c = 8.42$

21. $A = 17.85^\circ, B = 154.16^\circ, c = 7863$

22. $a = 1.985, b = 4.189, c = 3.652$

23. $b = 76.07, c = 40.53, B = 110.09^\circ$

24. $A = 77.06^\circ, a = 12.07, c = 5.104$

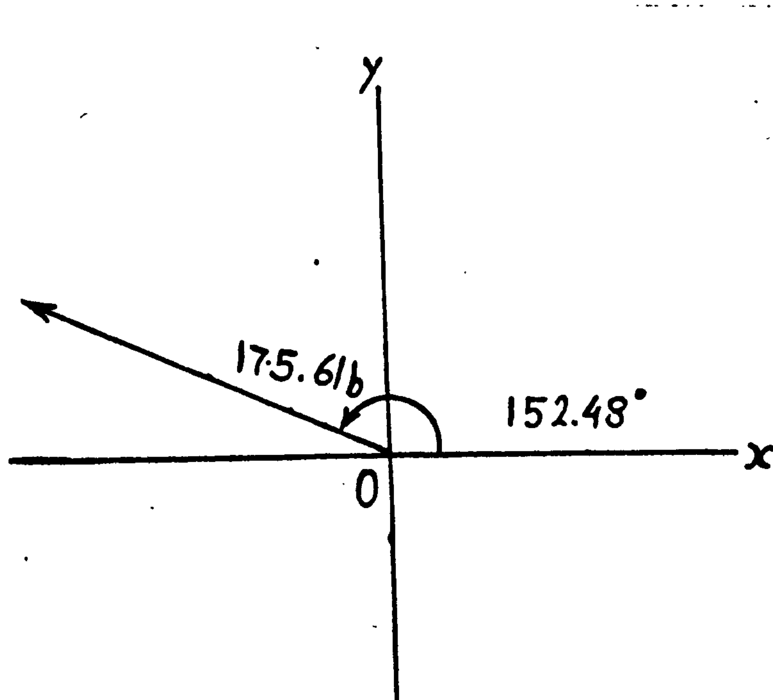
25. $b = 14.5, c = 13.0, C = 56.6^\circ$

26. $B = 40.6^\circ, b = 7.00, c = 18.0^\circ$

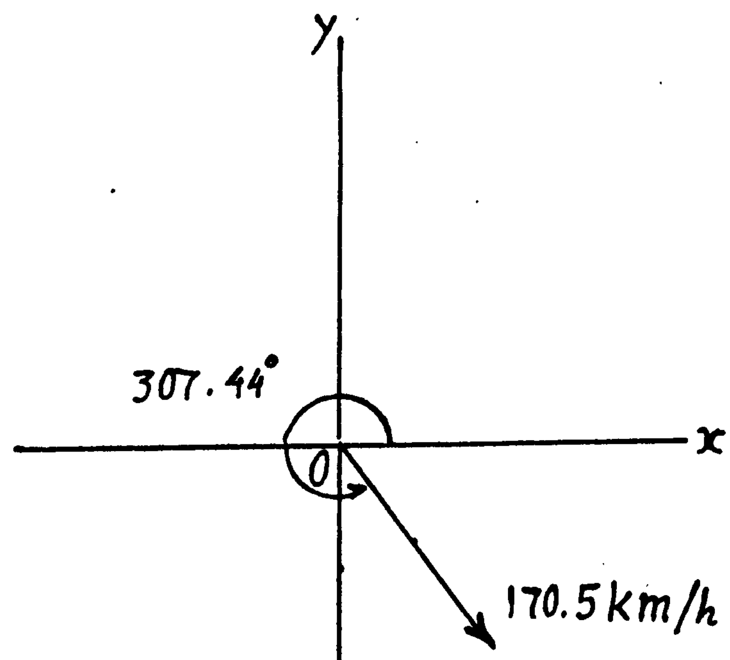
27. $a=186$, $B=130.0^\circ$, $C=106^\circ$
28. $b=750$, $C=1100$, $C=56.0^\circ$
29. $a=7.86$, $b=2.45$, $C=22.0^\circ$
30. $a=0.208$, $c=0.697$, $B=105.4^\circ$
31. $A=67.16^\circ$, $B=96.84^\circ$, $c=532.9$
32. $A=43.12^\circ$, $a=7.893$, $b=4.113$
33. $a=17.01$, $b=12.62$, $c=25.95$
34. $a=9064$, $b=9953$, $c=1106$
35. $a=5.30$, $b=8.75$, $c=12.5$
36. $a=47.4$, $b=40.0$, $c=45.5$

۳۷ـ مرکبهٔ عمودی وافقی‌ای‌قوه را که در شکل (۳۵ـ۲) ارائه شده،دریافت نمائید ؟

۳۸ـ مرکبه های عمودی و افقی‌ای‌سرعت را که در شکل (۳۶ـ۲) ارائه شده،دریافت نمائید ؟



شکل (۳۵ـ۲)



شکل (۳۶ـ۲)

۳۹ـ یك طیاره جیت، به زاویهٔ (35°)از زمین بلند میشود درصورتیکه به سرعت (۶۰) کیلومتر فی ساعت حرکت کند. زمان(t)را دریافت کنید که طیاره ارتفاع(۱۰۰۰)متر را بگیرد.

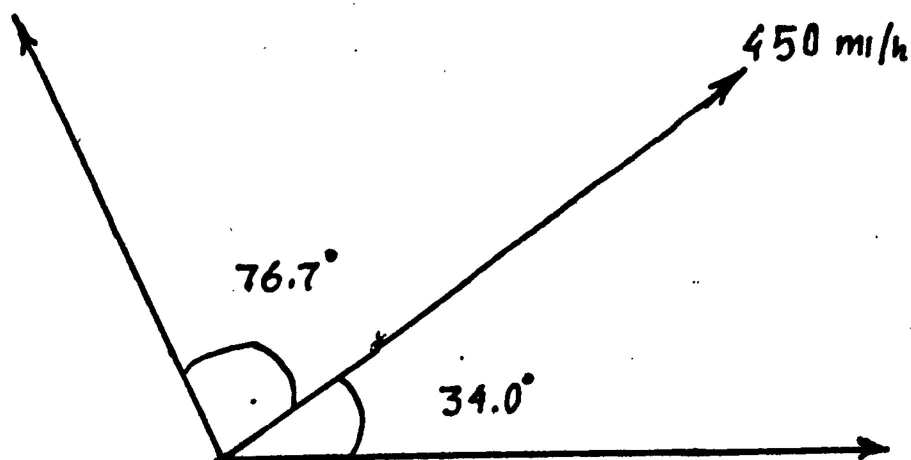
۴۰ـ یك مرمی بزاویهٔ (25°)نظر به سطح زمین به هوا فیر گردیده . اگر سرعت مرمی (۲۰۰۰)میل فی ساعت باشد ، مرکبهٔ عمودی‌ای‌این سرعت را دریافت کنید ؟

۴۱ـ یك بالون به سرعت (۱۵) فت فی ثانیه از زمین بلند میشود. وبه سرعت 22.5ft/sec ذریعهٔ باد به مسیر افقی رانده میشود. محصلهٔ هردو سرعت را دریافت کنید.

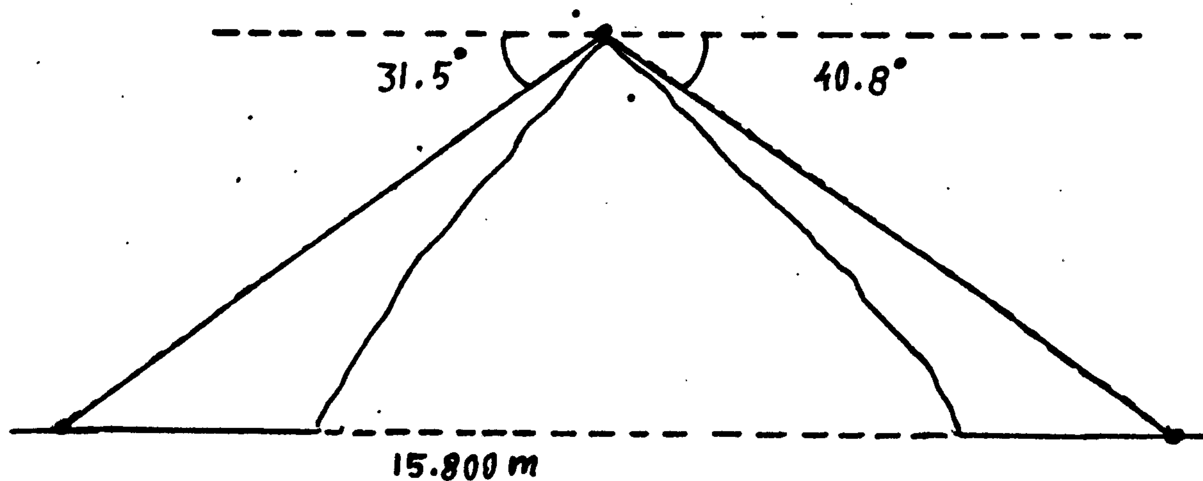
۴۲ـ یك کشتی در آب استاده به سرعت (۸) کیلومتر فی ساعت حرکت کرده میتواند. اگر این کشتی از یك دریا که سرعت آن (۲) کیلومتر فی ساعت است مستقیماً عبور کند، محصلهٔ سرعت کشتی و دریا را دریافت کنید.

۴۳ـ محصله دوسرعت (۴۵۰) میل در فی ساعت است که با یك مرکبهٔ خود زاویهٔ (۳۴°) درجه و با مرکبهٔ دومی زاویهٔ (۷۶/۷°) درجه را میسازد، شکل (۳۷ـ۲) مقدار هریك مرکبه را دریافت نمائید؟

۴۴ـ یك نفر بالای یك تپه دوجسم را در روی زمین طوری مشاهده میکند، که اجسام مذکور بدو طرف وی موقعیت دارند، زاویهٔ دیپریشن یکطرف (۳۱/۵°) و از طرف مخالف آن (۴۰/۸°) است، و اجسام موصوف از یکدیگر به فاصلهٔ (۱۵۸۰۰) متر دور واقع اند. شکل (۳۸ـ۲) معلوم کنید شخص مذکور ازجسم نزدیکتر چقدر فاصله دارد؟

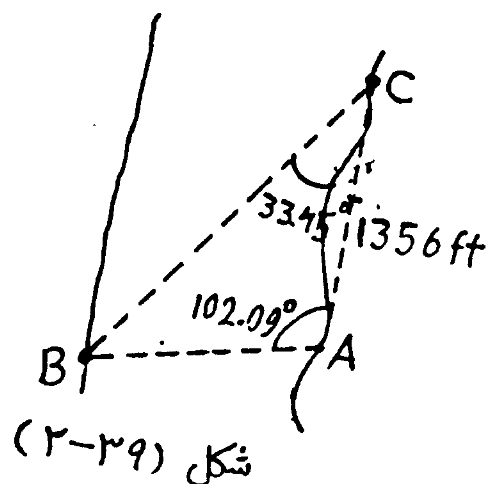


شکل (۳۷ـ۲)



شکل (۳۸ـ۲)

٤٥ـ برای آنکه فاصله بین دو نقطه در دوطرف دریا را پیدا کرده بیتوانیم ، فاصلهٔ (AC)را اندازه نمودیم ـ که(١٣٥٦) فت است . نقطهٔ (C)در همان ساحل دریا موقعیت دارد،که نقطهٔ (A)واقع است . زاویهٔ (BÂC)مطابق اندازه گیری یی(١٠٢/٠٩°) و زاویهٔ (AĈB)(٣٣/٤٥°) میباشد . فاصله بین نقاط "A" و "B" را دریافت نمائید ؟



شکل (٣-٣٩)

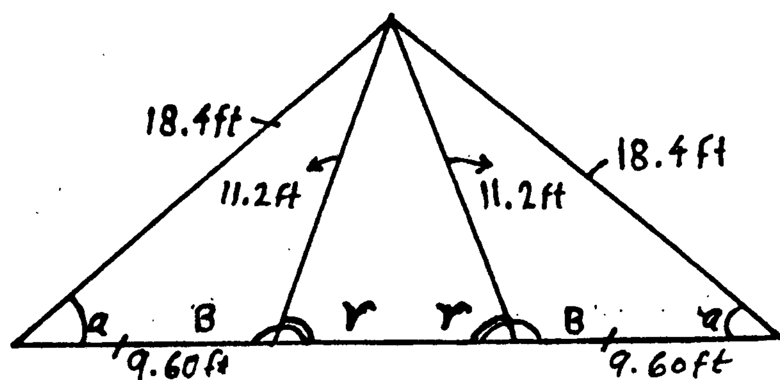
٤٦ـ یك زینه که طول آن "٢٢" فت است،به یك دیوار طوری گذاشته شده که با دیوار زاویهٔ (٢٩°) درجه را میسازد. اگر قاعدهٔ زینه از زیر دیوار به اندازهٔ(١٠/٧) فت دور واقع باشد، زاویهٔ ایلویشن دیوار با زمین چند درجه خواهد بود.

٤٧ـ دونقطهٔ ایلویشـــن از نقطهٔ سوم (١١٧/١) متر و (٨٨/١٦)متر فاصله دارند، خطوطیکه دو نقطهٔ اولی و نقطهٔ سومی را باهم وصل میکند در نقطهٔ سومی به زاویهٔ (١٥/٥٨°) ملاقی میشود. دونقطهٔ اولی از هم دیگر چقدر دور واقع اند ؟

٤٨ـ یك کریت توسط دو ریسمان از یك نقطه در هوا آویزان گردیده است . این ریسمان ها (١٤/٥)و (١٠/٥)میتر طول دارند و زاویه بین آنها(١٠٤°) درجه است . اگر ریسمانها درعین لیول قایم گردیده باشند، نقاط اتصال از همدیگر چقدر دورتر واقع اند.

٤٩ـ دو عراده موتر در نقطهٔ تقاطع دوسرك مستقیم قرار داشته اند یکی آن بالای یك سرك به فاصلهٔ (٥/٢٠)میل،و موتر دیگر،بالای سرك دوم مستقیماً به فاصلهٔ(٣/٧٥)میل، سفر کرده است . هردو درایور ذریعهٔ رادیو تماس میگیرند،که آنها به فاصلهٔ(٤/٥٠)میل از هم دیگر دور اند. زاویهٔ تقاطع هردو سرك چند درجه خواهد بود؟

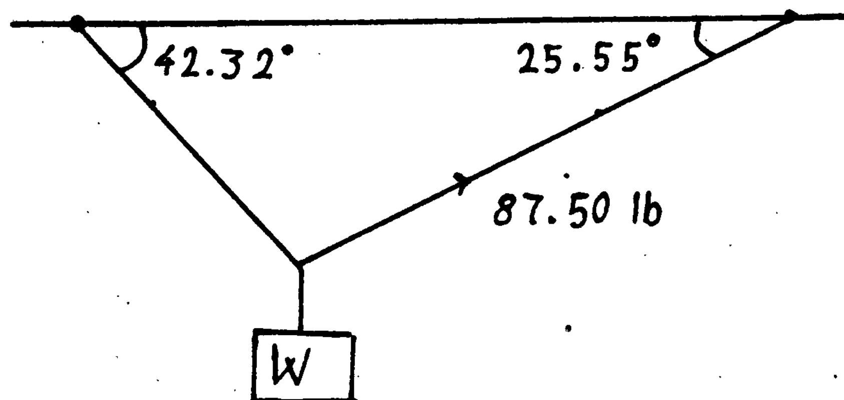
۵۰ـ در شکل ساختمانی (۴۰ـ۲) زاویه هارا که نشانی شده اند، دریافت نمائید؟



شکل (۴۰-۲)

۵۱ـ دو ضلع یك دندانهٔ اره باالترتیب (۲/۱۰) ملی متر و (۲/۲۵) ملی متر طول دارند، قاعدهٔ دندانه (۲/۲۵) ملی متر است . اضلاع دندانه به زاویهء چند درجه باهم تقاطع میکنند (زاویه نوك دندانه چند درجه میباشد)؟

۵۲ـ وزن را که توسط چند ریسمان طبق شکل (۴۱ـ۲) آوزیران است، دریافت نمائید، درصورتیکه قوهٔ کشش دریکی از ریسمانها (۸۷/۵۰) شوند.

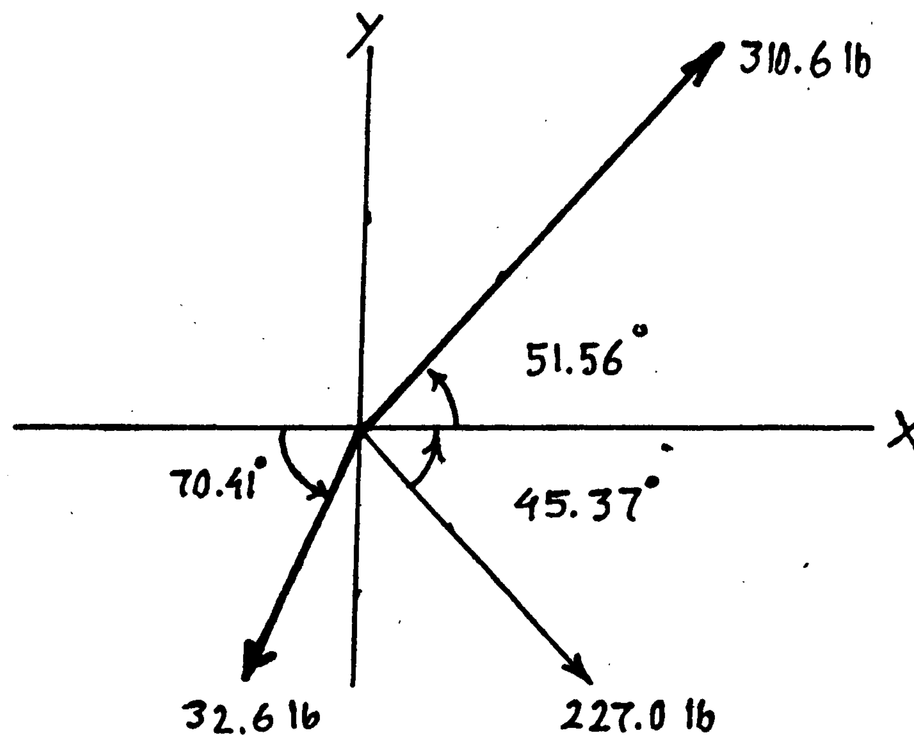


شکل (۴۱-۲).

۵۳ـ شهر بوستون به فاصلهٔ (۶۵۰) کیلومتر و زاویهٔ (۲۱°) در جنوب ـ غرب شهرهای فاکس موقعیت دارد. سیگنل های رادیوها نشان میدهد که، یك کشتی به زاویهٔ (۱۰/۵°) در جنوب شرق شهرهای فاکس، و بزاویهٔ (۵/۶°) در شمال شرق بوستون موقعیت دارد .

معلوم کنید، کشتی یی موصوف از هرشهر چقدر دورتر است .

٥٤_ محصله قوه هاييراكه در شكل (٤٢_٢) دريافت نمائيد .



شكل (٤٢-٢)

٥٥_ يك طياره جيت در مسير افقي با سرعت (١٢٠٠) فت في ثانيه پرواز ميكند. يك ميزايل از طياره بر مسير افقي به زاويهٔ (٣٠°) از آن فير گرديده . و با سرعت (٢٠٠٠) طياره را ترك ميگويد. سرعت ميزايل رابعد از (١٠″) ثانيه درصورتي دريافت نمائيد كه مركبهٔ عمودي يي آن از قرار ($V=-32t$) (فت في ثانيه) داده شده باشد!

فصل سوم -

گراف توابع مثلثاتی

یکی از طریقه های روشن و واضح که بتوانیم تغیرات توابع مثلثاتی را مطالعه نمائیم، تشریح آن ذریعهٔ گراف ها است . گراف های توابع مثلثاتی جهت تحلیل کمیت های را که تابع یکدیگر باشند-اهمیت زیاد دارد. درین فصل ما گراف های توابع مثلثاتی را مـــــــورد بحث قرار میدهیم . که بخش زیادتر آنرا گراف های (Sin x و Cos x) تشکیل میدهد. چندین نوع کاربرد عملی این گراف ها دراخیر این فصل درتمرین ها مفصلاً تشریح میگردد.

گراف $y = \overset{*}{a} \sin x$ و $y = \overset{*}{a} \cos x$:

گراف های توابع مثلثاتی بالای سیستم (کواردینت مستطیل) رسم میشوند. در ترسیم گراف های توابع مثلثاتی این طرزالعمل عادی است-که زاویه به واحد ریدین نشان داده شود. تقسیمات محورهای "x" و "y" به اعداد حقیقی نشان داده میشود، و میتوانیم که به هرواحدیکه مساعد باشد آنرا تقسیمات نمائیم .

بطور عموم زاویه ها بــه واحد ریدین ارائه میشود.

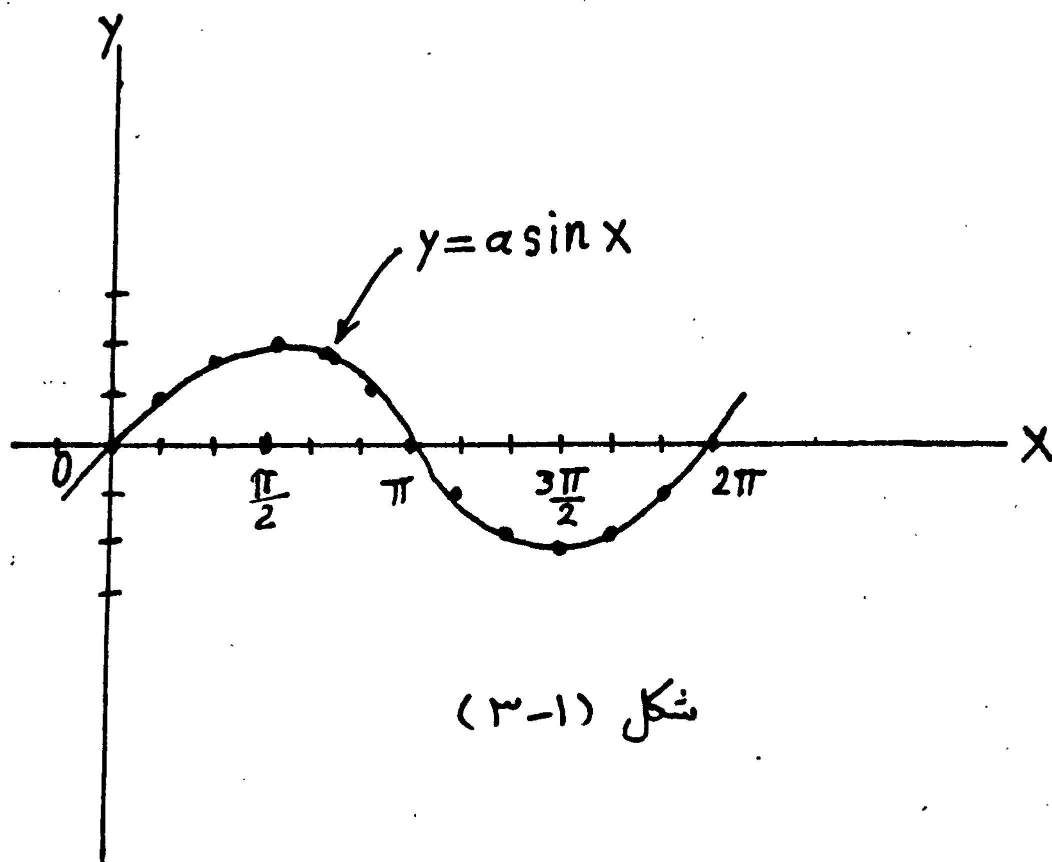
درین بحث برای آنکه گراف های مذکور را تشریح کرده بتوانیم ، ابتدأ می پردازیم به ترتیب دادن جدول قیمت ها برای معادلهٔ (y = Sin x) جدول ذیل را مشاهده نمائید.

شکل (۱_۳).

جدول تابع: $y = \sin x$

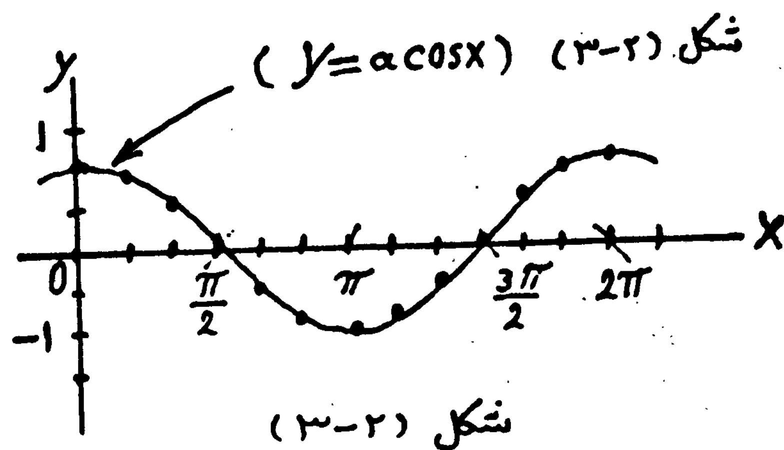
X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0

* ⇐ دامنهٔ اعظمی گراف است ، a



شکل (۱-۳)

همچنان گراف تابع "y= Cos x" در شکل (۲_۲) نشان داده شده.



شکل (۲-۳)

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1

گراف های فوق به همین ترتیب برعلاوهٔ قیمت های ارائه شده در جدول، دوام میکند طوریکه دوام آن بطرف مثبت "x" و منفی "x" تانهایت انکشاف میکند.

از مطالعه گراف های فوق نتیجه میگریم که هردو گراف به عین شکل میباشند، منتها

اینکه گراف "$y = a\cos x$" به اندازهٔ "$\pi/2$" واحد بطرف چپ جلو افتاده است .

شکل های این دوگراف باید دقیقاً تحلیل و مطالعه شود، با توجه باینکه گراف های مذکور محور "x" را در کدام نقاط قطع می نمایده این معلومات در ترسیم همچو گراف ها بسیار ضروری میباشد.

برای آنکه قیمت های گراف "$y = a\sin x$" را دریافت نمائیم ، قیمت های "y" را از رابطهٔ (معادلهٔ) "$y = \sin x$" (ضرب) با قیمت مطلقه $|a|$ یا a، در اینجاه قیمت اعظمی تابع ساین به محور "y" قیمت $|a|$ است، نه یك عدد الجبری .

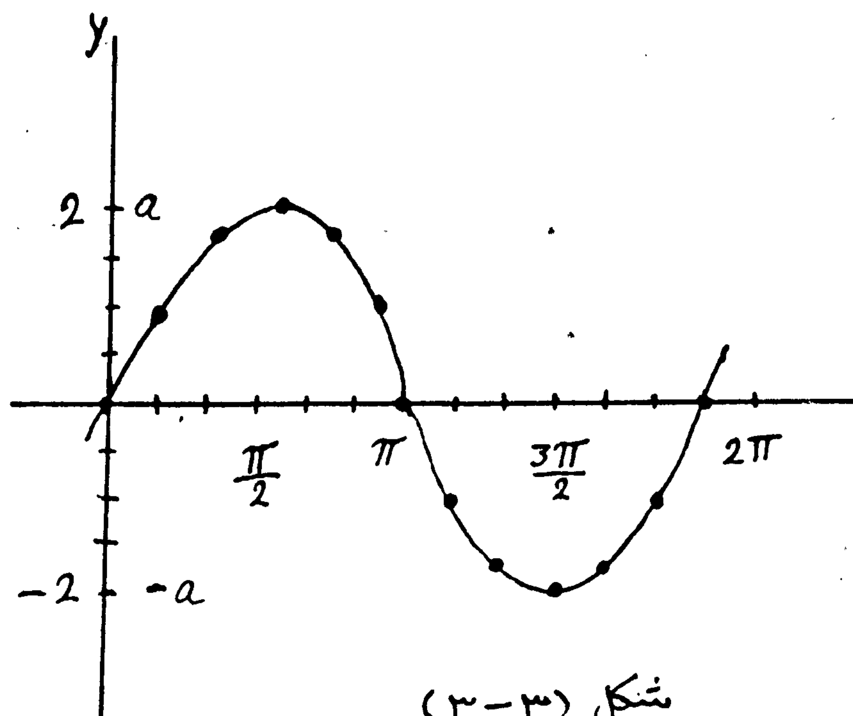
همین کمیت $|a|$ ، رابنام مقدار اعظمی (magnitude) یاد میکند، که قیمت اعظمی "y" را نشان میدهد. به عبارهٔ دیگر قیمت $|a|$ نقاط اعظمی واصغری گراف های "$y = a\sin x$" و "$y = a\cos x$" رانشان میدهد. مقدار $|a|$ درهردو تابع ساین و کوساین مقدار اعظمی را نشان میدهد.

مثال الف : گراف تابع "$y = 2\sin x$" را رسم نمائید.

گراف مذکور به اساس جدول مربوط به شکل (۳ـ۲) رسم گردیده است .

$y = 2\sin x$

X	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0	1	1.73	2	1.73	1	0	-1	-1.73	-2	-1.73	-1	0



شکل (۳ـ۳)

تمرینات : (۱-۱)

زاویه های مربوط به 1 الی 4 را رسم کنید.

1. $60^\circ, -90^\circ, 120^\circ$
2. $330^\circ, -150^\circ, 450^\circ$
3. $50^\circ, -360^\circ, -30^\circ$
4. $45^\circ, 225^\circ, -250^\circ$

در تمرین های 5 الی 12، برای هرزاویهٔ ذکر شده یك زاویهٔ «کوترمینل» مثبت و یك زاویهء «کوترمینل» منفی را دریافت کنید؟

5. 45° 6. 73° 7. 150°
8. 162° 9. $70^\circ30'$ 10. $153^\circ47'$
11. 278.1° 12. 197.6°

زاویه های مذکور در تمرینات 13 الی 16 که به ریدیان (radian) ارائه شده است، آنهارا به درجه تبدیل نمائید؟

13. 0.265 rad 14. 0.838 rad
15. 1.447 rad 16. 3.642 rad

زاویه های مربوط به تمرینات 17 الی 24 را به سیستم اعشاری تبدیل نمائید؟

17. $15^\circ12'$ 18. $246^\circ48'$
19. $86^\circ3'$ 20. $157^\circ39'$ 21. $301^\circ16'$
22. $4^\circ47'$ 23. $96^\circ8'$ 24. $38^\circ28'$

در تمرینات 25 الی 32 زاویه های که به سیستم عشاری نشان داده شده، به دقیقه و ثانیه تبدیل نمائید؟

25. 47.5° 26. 315.8°
27. 19.75° 28. 84.55° 29. 5.62°
30. 238.21° 31. 24.92° 32. 142.87°

درتمرینات ۳۳ الی ۴۰ زاویه های که بو حالت ستندارد می باشند و ازنقاط ذیل عبور می کنند رسم نمائید؟

موضوع	صفحه

فصل سوم

گراف توابع مثلثاتی

ضمائیم

موضوع | صفحه

ریاضیء سوم

مثلثات

Trigonometry

$= 12 \times 10 \sin(400t + 90^\circ)$

پروگرام تربیوی قوای بشری



تألیف و ترجمه : پوهنمل انجنیر نظر محمد «کاریار»

سال : قوس ۱۳۶۹

بسم الله الرحمن الرحیم

چو شمع از پی علم باید گداخت
که بی علم نتوان خدا را شناخت



ساینس ـ تیکنالوژی

ریاضی ـ مثلثات

«ساینس هنراندازه گیری است.»

«کاریار»

بسم الله الرحمن الرحیم

با عرض احترام !

خدای بزرگ (ج) را سپاس گذارم که بمن توفیق عنایت فرمود تا این رساله را شروع نمایم .

چاپ کردن این کتاب وقتی مساعد شد که محتواء این کتاب برای یك سمیستر در "پروگرام قواء بشری" در صنف ادونس تدریس گردید. موضوعات کتاب بعد از تکثیر نوت های صنفی برای مدت یك سال جمع آوری شده است . در اخیر کتاب ، جدول های مثلثات ، فورمول های عمومی مثلثات، فورمول های هندسه، فزیك، و واحدات اندازه گیره که از مآخذ های بسیار معتبر جمع آوری شده ، برای استفاده علمی شاگردان سهولت لازم فراهم می نماید.

در تهیه و ترتیب این کتاب، مشوره های شاگردان MTP ، استادان و انجنیران قابل ستایش بوده که مارا تشویق نمود تا این محتواء علمی را برای هموطنان خویش به السنه ملی دریك جلد اولی تقدیم نمایم .

باید خاطر نشان شود که تهیه کتب علمی و موضوعات ساینس ، کاری است بس مشکل و حساس زیرا هر کتاب بحیث یك وسیله افهام و تفهیم ، معلومات جمع شده از ماخذ ها و تجارب شخصی از طرف مؤلف در خدمت خواننده محترم گذاشته میشود . همچنان میدانیم که پروسه افهام و تفهیم یك معضله مغلق اجتماعی و مشکل است تا مطابق سویه ، احساس ، و هدف مندی فردی هرشخص، مفاهیم تحریر شده وضاحت و فساحت کامل دربرداشته باشد. با همهٔ این مشکلات، باید یادآوری نمایم که این کتاب هم خالیگاهای دارد ومن از خواننده‌های محترم تمنا دار م تا تجارب خویش را در بیهبود این کتاب با ما شریك ساخته ، نظریات علمی، و مفید را به من بنویسند . تا در طبع آینده کتاب اشتباهات تکرار نگردد و مارا درین کار خیلی ارزنده یاری رسانند.

اشخاص زیادی در تهیه این کتاب با من همکاری نموده است که من قبلاً ،به نوبه خویش از همه ایشان شکریه اداء کرده، و در خصوص از محترم: کوهستانی صاحب در

ایدیت، محترم احمدولید «سعیدی» در ترتیب و ترسیم اشکال ، محترم لطف الله خان تایپست، محترم عبدالوحید ، فوتوکاپی و از محترم سردار «شریعتی» ـ آپریتور کمپیوتر با ابراز افتخار خیلی ها سُپاس گذارم ، که مواد این کتاب را برای چاپ کردن آماده ساخت .

ومن الله التوفیق

Kargel

فهرست مطالب